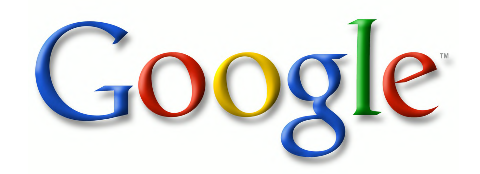


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/




1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
Prof.Louis Karpinski



QA
35
B15

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

TOMO IV.

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,
Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

TOMO IV.



MADRID.
Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M. y de la Real Academia.

M.DCC.LXXX.



Gift
Professor Louis Karpinski
4-13-1939

PROLOGO.

Despues de sentados en los tres primeros tomos de esta obra los principales métodos que han discurrido los Matemáticos para determinar las diferentes especies de cantidad, que han tomado por asunto de sus investigaciones, ya es tiempo de que manifestemos la aplicacion de estos artificios, porque en ella sola estriba todo el beneficio que resulta al género humano del estudio de las Matemáticas. De nada, ó muy poco serviría saber resolver equaciones, sumar series, qué propiedades caracterizan cada curva, *diferenciar* é integrar las expresiones algebráicas, &c. si todo el uso de estas doctrinas estuviera ceñido á las pocas aplicaciones que de ellas hemos hecho al paso que las íbamos declarando. Las mas de ellas, ó quasi todas, deben su origen á empeños de mayor provecho y sublimidad, que son el objeto de la parte de esta ciencia, conocida de todos con el nombre de Matemática mixta; porque dexándo especulaciones abstractas la Matemática, se emplea en contraherlas á averiguar quanto puede lo que nos importa saber del movimiento de los cuerpos, de las propiedades de la luz, de las apariencias celestes, y de otros muchos puntos de no menos transcendental importancia. Pero precisada á seguir el rumbo que la tiene señalado la limitada capacidad del entendimiento humano, va separando unas de otras las diferentes cir-

cunstancias que acompañan un mismo asunto, haciéndole tambien argumento de tratados separados, segun varía la naturaleza de los cuerpos en los quales le considera. Y como todos los que conocemos, se dividen en sólidos y fluidos, era muy natural dividiese en dos tratados distintos quanto acerca del movimiento de ambos nos importa indagar, llamando Dinámica la ciencia de las fuerzas y del movimiento de los sólidos, é Hydrodinámica la parte que trata de señalar las leyes del movimiento y equilibrio de los fluidos.

Aunque es uno mismo en la substancia el objeto de estos tratados, y en ambos se ventilan puntos de muy penosa indagacion, no llegan ni con mucho las dificultades de la Dinámica á las de la Hydrodinámica, y por esta circunstancia precede aquella á la otra, así como entre todos los ramos de la Matemática mixta ocupa el primer lugar la ciencia del movimiento de los cuerpos; mereciéndole esta primacía el influxo que tiene en los mas de los efectos naturales el movimiento, que con el fuego podemos considerar como el alma de toda la naturaleza. Donde no hay movimiento no puede haber vida; y los mismos elementos que Dios crió para la conservacion de lo criado, se transforman en causas, ó instrumentos de su destruccion, luego que parada por algun accidente su agitacion natural, imitan con su violento sosiego la inmobilidad, que á lo menos en los animales suele ser el primer indicio de la muerte.

Pe-

Pero el movimiento, aun el de un mismo cuerpo, va acompañado de tanta variedad de circunstancias, que si quisiésemos atender á todas á un tiempo, serian inapeables las dificultades de la Dinámica; pues por razon de dichas circunstancias admite, y aun exige diferentes consideraciones el estado en que esta ciencia considera los cuerpos. Su fin es declarar quanto corresponde á su movimiento quando caminan con tal uniformidad, ó igualdad, que en tiempos iguales siempre andan unos mismos trechos; quando van andando trechos, ó espacios tanto mayores, ó menores quanto mas tiempo se estan moviendo; quando chocan unos con otros; quando caminan por planos, ó en espacios donde nada les estorba, ó en espacios donde experimentan resistencia; quando andan una linea recta, ó lineas curvas; quando se mueven sueltos, ó atados á algun punto, ó unos con otros; finalmente quando aniquilan dicho movimiento algunos obstáculos que le opone la casualidad, *ó la intencion de un agente libre.*

El rumbo que seguimos en la averiguacion de todos estos puntos, le manifestará la lectura, ó el estudio del presente tratado; bien que podemos asegurar que es el mejor de quantos conocíamos y conocemos hasta el dia de hoy. Hablaríamos de él con menos satisfaccion, si no fuese obra agena, aun quando nuestro amor propio le creyese merecedor de mayores alabanzas: si damos á entender que lleva suma ventaja á los demas, no es tanto con la mira de preocupar al público á favor de nuestra eleccion, quanto

por realzar, en demostracion de gratitud, el mérito de su autor. Al admitir el encargo de escribir estos elementos, nos ocurrió un pensamiento que contemplamos como la única causa del tal qual acierto con que acaso le hemos desempeñado. Consideramos que no pidiéndosenos tratados nuestros, sino tratados buenos, correspondia echar mano de los que encontrásemos dignos de esta calificacion, sin ceder á los impulsos que pudiesen acometernos de gastar tiempo, con el fin de disimular nuestros plagios, en dar otra forma á las obras agenas que intentásemos apropiarnos. Aunque lo hubiéramos conseguido á tanta menos costa, quanto en lo mucho que se nos ha ofrecido registrar hemos hallado egemplos que nos enseñasen á lucirlo con agenas galas; sin embargo, nos hubiera apartado de seguirlos lo mucho que nos urgia, y ya lo hemos dicho en otra parte, concluir con toda brevedad nuestra tarea. Lo único á que nos arrojamos fué mudar el plan de los tratados que trasladábamos, y añadirles de camino algunos pedazos de otros, fiados en que autorizaban esta licencia los fines con que los escribíamos. Ademas de la calidad de las doctrinas que encierra un escrito, influye muchísimo en su excelencia el orden por el qual están distribuidas, cuyo orden debe ser diverso, segun varía alguno de los fines principales con que se escribe; dimanando de aquí la gran diferencia que va de un libro bueno á un libro que se pueda graduar de bien hecho. Uno y otro erá, atendidas las miras que llevaba su autor al tiempo de com-

componerla, la Dinámica que escribió M. Bezout (a) para los Caballeros Guardias Marinas de Francia; y deseosos de que quadrara todavía mejor con las nuestras, la hemos añadido, quando la íbamos coordinando y trasladando, diferentes asuntos que se especificarán con la individualidad que acostumbramos, siempre que damos razon de lo que nos toca agradecer á los diferentes Escritores cuyas obras hemos disfrutado.

Aquí se empezará á ver con qué destreza saben los Matemáticos descartar del movimiento de los cuerpos todas las circunstancias que le son peculiares, menos una que hacen empeño de aclarar, para empeñarse despues en la determinacion de otra, hasta considerarlas todas succesiva y separadamente, de modo que por último quede apurado todo el asunto. Así desnudan primero á los cuerpos de su gravedad, miran como de ninguna resistencia los planos por los quales se mueven, y los espacios que atraviesan, para atender únicamente al camino que andan, á la velocidad, ó á la mayor ó menor presteza con que caminan; esto es á la razon que hay entre el trecho que corren, y el tiempo que en andarle gastan. Pero sería la Dinámica una facultad de todo punto esteril y fantástica si no pasara de aquí: despues indaga qué alteraciones ocasio-

(a) *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine. Par M. Bézout, &c. Contenant l'application des principes généraux de la Méchanique à différens cas de Mouvement & d'équilibre.* Un tomo en 8. Paris 1767.

siona en el movimiento de los cuerpos su propia gravedad, su rozamiento, ó su choque con los cuerpos que encuentran &c. y una vez que logra determinar el Matemático todas estas alteraciones, dexa plenamente averiguado quanto pertenece al movimiento de los cuerpos, qual se verifica en la naturaleza.

Si las precisiones de que acabamos de hablar son tan socorridas para apear las dificultades peculiares á la Dinámica, no lo son menos algunos supuestos de que se vale en muchísimos casos. Estamos viendo con mucha frecuencia que si dos cuerpos impelen á un tiempo á otro en direcciones oblicuas, este sigue un camino distinto y compuesto del camino que seguia cada uno de los cuerpos impelentes; y porque de su impulso resulta una direccion única, es conocido entre los Matemáticos este fenómeno con el nombre de movimiento compuesto. Se puede, pues, tambien fingir que el movimiento de un cuerpo qualquiera es compuesto del de otros dos que le han impelido á un tiempo en distintas direcciones, ó por mejor decir, podemos considerar el movimiento de todo cuerpo como efecto del impulso de otros dos que con él chocaron en un mismo instante, y esto se llama resolver el movimiento único en otros dos de que se supone originado. Si la composicion del movimiento se verifica diariamente en la naturaleza, su resolucion no pasa de la fantasía del Matemático; pero le proporciona inmensa facilidad en infinitas investigaciones de la Matemática mixta, y es con otros principios el

fun-

fundamento de quantas doctrinas declaramos en este tratado.

Siempre que intentamos mover algun cuerpo, nos opone una resistencia que consume parte de nuestra fuerza, y solo conseguimos echarle de su lugar despues que nuestro conato se le ha comunicado. Aun quando fuera posible concibiésemos la materia como destituida de impenetrabilidad, no podríamos concebir cómo se podria comunicar movimiento alguno á un cuerpo que no se nos resistiese. Todo el tiempo que se está resistiendo, le traslada su impulso la causa que le impele; y esta resistencia, conocida con el nombre de fuerza de inercia de los cuerpos, es *otro principio* fundamental de la ciencia del movimiento.

En el choque de los cuerpos unos con otros se repara, que lo que el uno pierde lo gana el otro; y esta igualdad entre el movimiento perdido y el movimiento ganado, es *otro fundamento de la Dinámica.* La economía del Criador es igual á su inmensa sabiduría; nada se pierde ni aniquila de quanto ha puesto en el mundo, ní se perderá hasta que con la facilidad que lo crió decrete su total ruina; y así como la destruccion de unos cuerpos da nacimiento á otros, quedándose siempre en el mundo, bien que con diferentes formas, sin el mas leve desperdicio la misma cantidad de materia; tambien se repara y permanece invariable en el choque de los cuerpos la misma cantidad de movimiento. Es, pues, esta igualdad entre el

mo-

movimiento perdido y el movimiento ganado el tercer principio fundamental de la Dinámica.

El quarto, que es una ficcion felicísima del gran Matemático M. d'Alembert, quien le aplicó diestrísimamente á muy arduas cuestiones de este ramo, y aprovechó M. Bezout, siendo su obra la primera elemental donde la hallamos publicada, consiste en suponer el movimiento de un cuerpo como compuesto del que tiene en realidad, y de otros que se han aniquilado. Si es admirable la sencillez de este principio, es tambien prodigiosa la facilidad que proporciona, conforme lo demuestran varias aplicaciones que de él proponemos, en las investigaciones Dinámicas.

Todo cuerpo que se mueve impele á todos los que encuentra, obligándolos á moverse tambien en varios casos, y gastando en este choque ya parte de su fuerza, ya toda ella. Porque en qualquier cuerpo que camina hay tres cosas á que atender; es á saber, su masa, ó la cantidad de materia que cabe en su volumen ó tamaño, su velocidad, y su direccion. De la combinacion de las dos primeras resulta en los cuerpos mayor ó menor fuerza; pues nos enseña la experiencia diaria que quanto mas aprisa camina un mismo cuerpo, mayores obstáculos vence, ó aparta unos mismos de su camino con mayor ímpetu, y que quanto mayor sea su masa, ó mas macizo sea, mayor golpe da con una misma velocidad, que quando es menor el número de sus partes. La fuerza de los cuerpos en movimiento siempre se reputó igual al producto de su masa por

su

su velocidad, hasta que Leibnitz, Aleman, intentó probar que debia apreciarse por el producto de la masa por el quadrado de la velocidad. El alto concepto que merecia Leibnitz entre los Matemáticos (*b*), el lugar eminente que ocupaba entre los hombres de ingenio, talento y doctrina (*c*), despertaron tales dudas en Geómetras de grandes créditos acerca de la antigua opinion, que la impugnaron con todo empeño; pero no por eso desmayaron sus partidarios, quienes despreciando, como es razon, en las ciencias naturales la autoridad de los hombres, examinaron las pruebas, ó los argumentos de Leibnitz y sus sequaces, sin que los acobardara la celebridad de sus autores. Originóse de aquí una disputa que duró algunos años con bastante porfia, quedando por último triunfante el modo de medir las fuerzas de los cuerpos en movimiento, que hasta Leibnitz se habia seguido sin contradiccion ninguna. Lo reñido de la contienda, y la graduacion de los campeones que entraron en la lid no nos permitió omitir esta cuestion, y la tratamos, ofreciendo á nuestros lectores, conforme lo egecutó Scherfer (*d*), la sustancia de quanto

se

(*b*) Era tan gran Matemático Leibnitz, que fué el émulo de Newton, habiéndose puesto en duda qual de los dos fuese el inventor del cálculo infinitesimal.

(*c*) Fué Leibnitz Metafísico profundísimo; Poeta Latino elegante, gran Teólogo, Jurisconsulto consumado, Publicista sabio, tan prodigioso en fin, que un Orador Católico (el P. Porée) le llamó el Portento de la docta Alemania: *Miraculum peritæ Germaniæ*.

(*d*) *Institutiones Physicæ conscriptæ in usum suorum Auditorum. A Carolo Scherf-*

se alegó por una y otra parte. De esta disputa ya no queda mas vestigio que el principio llamado el principio de la conservacion de las fuerzas vivas, del qual han hecho grandes Matemáticos acertadas aplicaciones. Nosotros le damos á conocer en un caso no mas, aconsejando á los que desearen verle demostrado con entera individualidad, acudan á la Dinámica del esclarecido Matemático M. d'Alembert, de cuyo escrito se dará individual razon mas adelante.

Por mas que se esmere un escritor en la formacion de su obra, no es posible estén todos los puntos tratados con igual proligidad; y algunos hay en que debe detenerse poco, ciñéndose á indicar, ó apuntar los elementos por los quales ha de principiar su averiguacion. Esto mismo notarán en nuestra Dinámica los que la leyeren con cuidado: hémoslo hecho pocas veces, y nunca en asuntos esenciales, llevando el fin de provocar, digamoslo así, á los lectores, y darles gana de estudiarlos en escritos donde les corresponde estar tratados con la competente extension. Nuestro ánimo no es tanto formar Matemáticos consumados, quanto infundir en los ingenios Españoles el deseo de serlo, presentándoles por el mejor método posible los fundamentos de esta ciencia. Pero en los puntos fundamentales, en todo lo que puede contribuir á manifestar in-

me-

Scherffer Phil. Prof. Pub. Ord. & Examin. in Universitate Viennensi. Viena 1752. Dos tomos en 8. Hay de esta obra otra edicion mas moderna, que lleva muchas ventajas á la primera.

mediatamente la utilidad de la Mecánica, hemos procedido con tanta escrupulosidad, que interpolamos en la obra de M. Bezout lo que para el intento echábamos en ella menos, y á fin de completar la nuestra acudimos á tratados elementales sobre la misma materia recien publicados por Matemáticos de no vulgar opinion. Al Abate Bossut (*e*) tiene que agradecer el público la teórica del choque obliquo de los cuerpos, algunos puntos sobre la dificultosísima doctrina del rozamiento, y la resolucion de las cuestiones de Estática. Los aficionados que gustaren de ver resueltas muchas mas, podrán echar mano de la Mecánica de Clark (*f*), que resuelve gran número de ellas por una propiedad del centro de gravedad de los cuerpos que demostramos en la pág. 71 de este Tomo. La resolucion de las cuestiones de Dinámica con que finaliza el tratado, es de diferentes manos, bien que lo mas está sacado de las obras

(*e*) Se han sacado de dos obras de este Escritor, cuyos títulos son

Traité élémentaire de Méchanique & de Dinamique, appliqué principalement au mouvement des Machines. Par M. l'Abbé Bossut, Professeur Royal de Mathématiques aux écoles du Génie, à Mézières, &c. Un tomo en 8. Charleville 1769.

Traité élémentaire de Méchanique Statique avec des notes sur quelques endroits. Par M. l'Abbé Bossut, de l'Académie Royale des Sciences &c. Un tomo en 8. Paris 1772.

(*f*) *An easy introduction to the Theory and practice of Mechanics; containing a variety of curious and important Problems investigated with the greatest facility by the application of one general property of the center of Gravity without having recourse to the composition and resolution of forces. By Samuel Clark.* Un tomo en 4. Londres 1764.

obras de los dos hermanos Jayme y Juan Bernoulli (g). A la resolucion de estas cuestiones debieron los cálculos diferencial, é integral la victoria que consiguieron de sus contrarios. En la Matemática pura, en una facultad [illegible] que

(g) *Jacobi Bernoulli, Basileensis, Opera.* Dos tomos en 4. Ginebra 1744. *Johannis Bernoulli, &c. Opera omnia, tam ante sparsim edita, quam hactenus inedita.* Quatro tomos en 4. Lausana y Ginebra 1742.

A estos dos esclarecidos Matemáticos cupo gran parte en la revolucion que experimentó la Geometría, y tanto dilató sus límites, á fines del siglo pasado, y principios del presente. Ademas de los inventos con que cada uno de ellos se distinguió, tiene Juan la gloria de que al estudio de sus obras reconoce el célebre Matemático M. d'Alembert ser deudor de sus adelantamientos en la Matemática, y de haber sido el Maestro del Marques del Hospital, á quien enseñó el cálculo diferencial, é integral, hallándose en el tomo III. de sus obras las lecciones que de este último compuso para tan distinguido discípulo. Jayme, hombre de ingenio no menos sutil que profundo, fué el maestro de su hermano, pero maestro tan afortunado, que la fama de su discípulo empezó por los desafios matemáticos, con que este provocó á su hermano mayor. La historia de la emulacion, y aun de la desavenencia que de aquí se originó entre los dos hermanos, se halla en el elogio que de Jayme Bernoulli escribió el discreto M. de Fontenelle, Secretario que fué de la Real Academia de las Ciencias de París.

El estudio de las obras de Jayme, y Juan Bernoulli será de muchísimo beneficio para todo hombre que aspirare á ser Matemático: en ellas hallará los principios de muchos inventos con que se honran los mayores Matemáticos de estos tiempos; y resueltos con la sencillez propia de los primeros pasos que se dan en toda facultad, otras cuestiones, ademas de las que he trasladado. Vistos en su nacimiento, digamoslo así, estos problemas, facilitan muchísimo la inteligencia de las dificultades que las han añadido los Geómetras mas modernos; y se puede sacar no poco provecho de las doctas notas con que ilustró las obras de Jayme Bernoulli el sabio Gabriel Gramer.

que no admite otro argumento que la demostracion, ni mas autoridad que la evidencia, ha habido tambien sus controversias, ó por mejor decir sus oposiciones. Los mas de los inventos que perfeccionan los diferentes ramos de los conocimientos humanos, siempre experimentan alguna contradiccion, hasta que extinguida la generacion de los facultativos que sin ellos alcanzaron fama de consumados, solo quedan aquellos que no teniendo hecha todavía su opinion, acogen con agradecimiento, y aun con respeto qualquier camino que se les abre para llegar á la verdad; persuadiéndose á que todos los adelantamientos de una ciencia no están ceñidos en la corta esfera de los conocimientos de un limitado número de sus profesores. Los prodigios que obraban con los nuevos cálculos Newton en Inglaterra, en Alemania Leibnitz, en Suiza y Holanda los dos hermanos Bernoulis, y el Marques del Hospital en Francia, llamaron la atencion de la mayor parte de los Matemáticos; pero como eran estos cálculos una especie de cifra, un arcano con el qual se resolvian enigmas que se resistian á los medios usados por los Matemáticos antiguos, muchos de estos, fuese envidia, fuese vanidad, no hicieron al invento la acogida que se merecia. Con el fin de desacreditarle, y sus mismos promovedores con el deseo de lucir, propusieron al orbe matemático, entre otras, las cuestiones de Dinámica, todas escogidas por su gran dificultad, que hemos añadido al fin de nuestro tratado. La poca uniformidad que se reparará en su resolucion, ha sido de todo punto voluntaria: nos propu-

simos hacer patente quan varios son los caminos por donde alcanzan los sabios la verdad segun la casta del ingenio de cada uno. Y aunque mas perceptible lo hubiéramos hecho trasladando de distintos autores la resolucion de una misma cuestion, sin embargo tenemos por suficiente lo que con esta mira presentamos á nuestros lectores. La resolucion de las dos primeras es digna de notarse por la suma brevedad y elegancia con que se consiguió, reduciendo toda su dificultad á la de una cuestion de Geometría pura, cuya transformacion debe practicarse siempre que se puede, por la inmensa sencillez á que queda entonces reducido el problema.

Quando averiguamos las circunstancias de las trayectorias, ó de algunos movimientos curvilineos, nos detenemos en el caso particular de ser la fuerza central en razon inversa de los quadrados de las distancias, y echamos los fundamentos en que estriba la resolucion de una cuestion de Dinámica, que se ha hecho muy ruidosa en este siglo. Consta, y lo tenemos evidentemente probado en el Tomo VIII, que los cuerpos gozan la propiedad de atraerse unos á otros en razon directa de sus masas, y en razon inversa de los quadrados de sus distancias; por manera que un cuerpo atrae tanto mas á otro, quanto mayor sea el cuerpo atrayente, y quanto menor sea el producto que se saca multiplicando por él mismo el número que expresa la distancia que hay entre los dos. Verifícase, pues, esta ley entre los planetas primarios, y el sol, centro de sus

movimientos; y como la masa de este astro es mucho mayor que la de qualquier planeta, es tambien mucho mayor la energía con que atrae á sí los planetas, respecto de la atraccion con que estos obran unos en otros. De aquí es que los movimientos de los cuerpos celestes se consideran como originados de un movimiento de proyeccion, y de otro central, que es su tendencia ácia el cuerpo, al rededor del qual están dando vueltas; y que el movimiento de la luna es efecto de la atraccion de la tierra, siendo ambas atraidas del sol. Resultan de la atraccion que experimenta á un tiempo la luna de parte del sol y de la tierra, tales irregularidades en el movimiento de aquella, que ha sido este el tormento de todos los Astrónomos, y ha empeñado á los mayores Matemáticos de este siglo los señores Euler, d'Alembert y Clairaut en la resolucion de este problema: *Determinar los movimientos de tres cuerpos que se atraen unos á otros en razon directa de las masas, y en razon inversa de los quadrados de sus distancias*, cuya cuestion es conocida con el nombre de *Problema de los tres cuerpos*. Aunque por estar pocas veces la luna en un mismo plano con el sol y la tierra, se hace mas dificultosa la resolucion de este problema, acaso hubieran sido mas felices en sus tentativas los hombres grandes á quienes ha dado tanto exercicio, si proponiéndosele con menos generalidad, hubiesen empezado considerando el caso, mas sencillo, de estar los tres cuerpos en una misma linea recta. Así se lo presume el mismo M. Euler en unas considera-

ciones sobre este problema leidas en una junta de la Real Academia de Berlin el dia 4 de Diciembre de 1765, que trae extractadas Juan Bernouli el Mozo (*b*).

„ M. Euler, dice el autor del extracto, manifiesta „ aquí con su acostumbrada claridad quan distantes esta- „ mos todavía de tener una resolucion completa del pro- „ blema de los tres cuerpos. De sus reflexiones prelimi- „ nares saca por consecuencia que no hay que esperar poder „ resolver este famoso problema en general, á no ser que „ primero se haya logrado resolver el caso en que estén „ los tres cuerpos en una linea recta; lo que sucede quan- „ do se colocaron al principio en una recta, y han esta- „ do allí en reposo, ó se les ha impelido en la misma di- „ reccion. Es, pues, de admirar que los grandes Geóme- „ tras que se han empeñado en el problema de los tres „ cuerpos, no hayan empezado sus investigaciones por el „ caso del movimiento rectilineo. Quizas no lo han hecho „ porque este movimiento no se verifica en el mundo; no „ será á buen seguro porque se haya tenido por demasia- „ do sencillo el problema. Sería mal fundado este parecer, „ pues M. Euler sujeta aquí este caso al cálculo, solo para „ evidenciar quan distantes estamos todavía de su resolu- „ cion, bien que sea el mas simple de quantos incluye el „ problema de los tres cuerpos, y con el fin de empeñar „ á los Geómetras que quisiesen exercitarse todavía en este

„ gran

(*b*) *Recueil pour les Astronomes*, *tom.* 1. *pag.* 73.

,, gran problema, á que junten sus conatos con los suyos ,, para vencer primero las dificultades que encierra el caso ,, particular de que hablamos.

,, Despues de este cálculo repara M. Euler que apenas se ha adelantado mas allá del primer paso en la resolucion del problema principal. Este primer paso, añade, incluye algunas propiedades generales, que convienen ,, no solo al movimiento de los tres cuerpos, que se atraen ,, mutuamente, pero que se verifican igualmente por grande que sea el número de los cuerpos; y como es importante conocer estas propiedades generales, bien que ,, basten á determinar el movimiento en siendo los cuerpos mas de dos, M. Euler hace patente en lo restante de ,, su disertacion como se deducen de las primeras fórmulas ,, generales que suministran los principios mecánicos.

,, La razon por que estas propiedades generales no ,, son suficientes, es que no encaminan mas que á siete equaciones integrales en lugar de las nueve que se ,, necesitan para la cumplida resolucion del problema en ,, el supuesto de ser tres los cuerpos. Es por consiguiente ,, indispensable hallar dos mas, y esto es lo que los mas ,, diestros Geómetras no han podido conseguir á pesar de ,, todos sus esfuerzos. El método de que me he valido aquí, ,, prosigue M. Euler, parece que ya no puede dar mas de ,, sí, y será forzoso sin duda alguna buscar un rumbo de ,, todo punto nuevo; en el estado en que se halla el Analisis ,, parece que no se puede todavía decir si estamos, ó no

„ muy distantes de encontrarle. Lo cierto es, que en llegando á este punto, el Analisis sacará mucho mayores „ ventajas de lo que puede prometerse la Astronomía, por „ causa de la complicacion con que estan enlazados unos „ elementos con otros, segun todas las apariencias, de suerte que apenas habrá que esperar para la práctica algun „ beneficio.

Como quiera, los que gustaren de ver resuelta mas por extenso esta cuestion, podrán acudir al tomo IV. del Curso de M. Hennert, á la Mecánica del Abate Marie, y sobre todo á las Lecciones de Cálculo Integral de M. Cousin (*i*). Con esta cuestion resuelve tambien otras, y en particular la de la curva tautocrona, la de la curva brachystocrona &c. con toda la generalidad que las han mirado los Matemáticos de esta era, y valiéndose para su resolucion de los inventos con que estos han promovido la ciencia del Analisis. Es tal la senda que sigue este Escritor, que sobre hacer uso, igualmente que el Abate Marie, del principio de la conservacion de las fuerzas vivas, infiere la resolucion del problema del principio de la accion mínima, introducido con igual destreza que felicidad por M. Euler en la Dinámica (*k*).

Aun-

(*i*) *Leçons de Calcul Différentiel & de Calcul Intégral. Par M. Cousin, de l'Académie Royale des Sciences, &c.* Dos tomos en 8. Paris 1777.

(*k*) El principio de la accion mínima es este: *Siempre que sucede alguna mudanza en la naturaleza, la cantidad de la accion que la causa es la menor posible.* Sobre ser este principio muy digno de la infinita sabiduría del Criador,

Aunque completa para nuestros fines., segun dexamos insinuado, nuestra Dinámica, está muy lexos de incluir todo lo que en este ramo hay que saber; en muchos puntos hemos tenido que ceñirnos á los principios fundamentales, quedando con el cuidado de dar noticia en este prólogo de los escritos donde los aficionados hallarán con el pormenor que pueden desear algunas doctrinas que en el nuestro se tocan, para decirlo así, de paso no mas. Al mismo tiempo darémos á conocer otros tratados, que si bien no son tan elementales como el nuestro, son sin embargo acreedores á que se haga de ellos particular memoria, á fin de proporcionar á nuestros lectores el exercitarse, si quisieren, en estudiar unos mismos puntos tratados por diferentes métodos, cuyo exercicio agilita el entendimiento, y ensancha sus facultades, suministrándole ocasiones de comparar y escoger.

Trabaud publicó en Frances una obra de Mecánica (*l*)

dor, le hacen patente las pruebas que de él trae M. Euler al fin de su Obra intitulada: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Auctore Leonbardo Eulero.* Un tomo en 4. Lausana y Ginebra 1744.

Entre muchos problemas de Matemática mixta que resuelve con sumo despejo el Abate Sauri en el tomo V. de su *Cours de Mathématiques*, cinco tomos en 8. París 1774, hay algunos resueltos (véase la pág. 281 de dicho tomo) por el principio de la accion mínima, cuya solucion verán con gusto los que la cotejaren con la que se halla de las mismas cuestiones, pág. 142. de este tomo.

(*l*) *Principes sur le Mouvement et l'équilibre, pour servir d'introduction aux Méchaniques & à la Physique.* Un tomo en 4. de 616 planas. París 1741.

sumamente clara, donde trató, sin hacer uso ninguno del Algebra, de todas las especies de movimiento que consideramos al principio de nuestro tratado, de las fuerzas centrales, del equilibrio, del choque directo de los cuerpos, de la Estática &c. El tamaño del volumen basta para dar á entender que todos estos puntos están tratados en él con muchísima individualidad, y lectores habrá acaso que argüirán de difuso y algo pesado á su autor. No nos empeñarémos en vindicarle de esta nota; pero sabemos que son de temple muy diverso los entendimientos de los hombres que se dedican al estudio de las Matemáticas, y que lo que para unos no es mas que conciso, para otros es confuso; lo que unos gradúan de breve, otros lo tachan de diminuto, y que la obra de Trabaud podrá ser de muchísimo provecho para los aficionados de ingenio tardo, que por lo comun son constantes, y á quienes pueden convenir las obras de los escritores que se les parecen á lo menos en la mucha paciencia de que suele dotarlos la naturaleza.

En la Mecánica de Emerson (*m*) faltan á la verdad muchos de los asuntos de Dinámica que nosotros tratamos; pero propone con admirable claridad y sencillez todos los demas que no quiso omitir. Entre estos hay tres particularmente muy dignos de atencion; es á saber, la determina-

(*m*) *The Principles of Mechanics. Explaining and demonstrating the general Laws af motion, &c. The second edition, corrected, and very much enlarged.* Un tomo en 4. Londres 1758.

nacion del peso que carga á una pared una viga, conforme esté sentada, la averiguacion de la carga que puede aguantar segun sea su figura, y esté puesta, y diferentes modos de comunicar por medio de algunas máquinas el movimiento que se quiera, uniforme ó acelerado. Y últimamente trae la descripcion de 108 máquinas, calculando su efecto, entre las quales algunas hay sumamente curiosas y de mucha utilidad.

El tomo IV. del Curso de Hennert (*n*) es un verdadero tratado de Dinámica, en el qual sobre seguir su autor las huellas de su maestro Leonardo Euler, se dá por entendido de los descubrimientos hechos en este ramo por otros eminentes Geómetras de este siglo, siendo tambien su obra el primer tratado elemental en que se consideran las circunstancias anexas al movimiento de toda máquina. Has-

(*n*) *Elementa universæ Mechanices, quæ Staticam, Phoronomiam, Dynamicam, ac motus mechanicam complectuntur. Auct. Joanne Frederico Hennert.* Un tomo en 8. Utrech 1768.

Por Estática entiende Hennert lo mismo que todos; es á saber, la ciencia que trata del equilibrio: llama Phoronomia la ciencia del movimiento de los cuerpos sueltos: Dinámica, la ciencia del movimiento de los cuerpos atados á algun punto, ó unos con otros, ó precisados á dar vueltas al rededor de algun ege, &c. y por Mecánica del movimiento entiende la ciencia que enseña cómo se causa el movimiento por medio de las máquinas.

Herman llamó Phoronomia en general la ciencia que trata de las fuerzas, y del movimiento de los cuerpos sólidos y fluidos, de la qual escribió un tratado bastante penoso de entender con este título: *Phoronomia, sive de viribus & motibus corporum solidorum & fluidorum. Libri duo, Auctore Jacobo Hermanno Basileensi, &c.* Un tomo en 4. Amsterdam 1716.

Hasta de pocos años á esta parte se habian ceñido los escritores de Mecánica á considerar las máquinas solo en el estado de equilibrio; y bien se echa de ver quan imperfecta quedaba la Estática, pues era dificultoso, y tambien imposible averiguar con esta sola teórica el efecto de una máquina propuesta. Para esto es indispensable atender al rozamiento y á la inercia de sus diferentes partes, y á la rigidez de las cuerdas ó maromas. Esta doctrina, cuyos fundamentos echó M. Euler con el nombre de *Mecánica del movimiento*, tambien está declarada en nuestra Dinámica, y con mayor individualidad y mas cumplidamente que no en la de Hennert. No obstante, esta siempre será de mucho beneficio para los que gustaren de radicarse en el método de tratar analíticamente los asuntos de Dinámica, y les servirá de una excelente introduccion á la obra magistral que sobre esta materia escribió el Sr. Euler, así como debe mirarse la nuestra como una introduccion no menos apreciable á otro tratado original de M. d'Alembert; siendo este uno de los mayores elogios que podamos tributar á la obra de M. Bezout.

Todas las circunstancias que hacen recomendables cada uno de los tratados de que hemos dado razon hasta aquí, concurren en la Dinámica del Abate Marie (*o*). Sabe

(*o*) *Traité de Méchanique. Par M. l'Abbé Marie, de la Maison & Societé de Sorbonne, Censeur Royal, Professeur de Mathématiques au College Mazarin.* Un tomo en 4. de 431 planas de letra gorda. París 1774.

be conciliar con tal felicidad este escritor la claridad con la concision, que dudamos haya obra elemental sobre esta materia que lleve alguna ventaja á la suya. De camino que declara las doctrinas fundamentales, cuyo estudio no puede escusar ninguno que quiera enterarse de la ciencia del movimiento, las aplica á cuestiones de mucha sublimidad, señalando con cuidado estas importantes digresiones para que las omitan aquellos lectores, que, bien que hechos cargo de su importancia, quisieren mirarlas como verdaderas digresiones. Encierra mucha doctrina en volumen muy pequeño este tratado; todo está propuesto con igual desembarazo que elegancia; y entre otros puntos que declara con suma individualidad, hay uno, y es el movimiento de los cuerpos arrojados, llevando en cuenta la resistencia del ayre, asunto fundamental para la Artillería, que acaso no está tan cumplidamente declarado en otra obra ninguna.

Para los que en las obras de Mecánica buscan tanto casos prácticos, como especulaciones teóricas, ó por mejor decir aplicaciones de la teórica á la práctica que puedan guiarlos siempre que se les ofrezca inventar ó formar juicio de alguna máquina, no conocemos obra mejor que la de Desaguliers, Inglés (*p*). Las notas con que aclara y comenta las lecciones de que se compone, estan llenas de re-

(*p*) *Cours de Physique Experimentale, par le Dr. S. T. Desaguliers, de la Societé Royale de Londres. Traduit de l'Anglois par M. Pezenas, &c.* Dos tomos en 4. grande. París 1751.

reflexiones muy juiciosas acerca de la Mecánica práctica, y particularmente de experimentos hechos con gran tino para averiguar la fuerza de los hombres y de los animales. De esta obra han sacado varios escritores los hechos que han servido de fundamento á sus investigaciones sobre varios puntos de la mecánica del movimiento. En ella se hallan tambien observaciones de mucha importancia acerca de la desconfianza con que merecen ser acogidos aquellos arbitristas que de quando en quando vienen proponiendo y ponderando máquinas de su invencion, de cuyas observaciones trasladarémos algunas al fin de este Prólogo.

Las mas de las obras de que hemos hecho mencion hasta aquí se pueden llamar elementales, y quasi todas abrazan los dos asuntos principales que encierra la nuestra, es á saber, la Dinámica y la Estática. Réstanos dar á conocer dos, para cuya inteligencia se necesita algun mayor caudal de cálculo integral que el que hemos publicado en nuestro tomo tercero. La primera es la Dinámica de M. d'Alembert (q), donde se hallan resueltas por aquel principio tan sencillo de su autor cuestiones muy dificulto-

(q) *Traité de Dynamique; dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, & demontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque. Par M. d'Alembert, &c.* Un tomito en 4. Paris 1758. Es segunda edicion corregida y añadida por el autor, y lleva tambien varias notas de M. Bezout, que facilitan muchísimo su inteligencia. Es obra original.

tosas propias de este ramo, en las quales no se sabe que es lo que mas hay que admirar, si el pulso con que están escogidas, la elegancia con que están resueltas, ó la cortesanía con que propone aquel esclarecido Geómetra sus dudas sobre las resoluciones que de algunos de los mismos problemas han publicado varios Matemáticos de esta era.

El otro tratado de Dinámica es obra del célebre Leonardo Euler, tantas veces elogiado en nuestros Prólogos, y es seguramente la mas completa y mas profunda que conocemos sobre esta materia, que trata de propósito el autor desde sus primeros principios. Es obra verdaderamente clásica por la extension con que abraza el asunto; ingeniosísima, por el método que sigue su autor; original, por la novedad de muchas cuestiones cuya resolucion se propuso; y provechosísima sobre todo, por diferentes métodos que incluye, desconocidos hasta que ella se publicó, para integrar muchísimas diferenciales (r).

En obra de asuntos tan dificultosos y tan varios, y de tanta novedad, nadie extrañará que padeciese algun descuido su autor, á pesar de la extraordinaria facilidad con que sabe manejar las materias mas intrincadas de todos los ramos de la Matemática: padeciólos con efecto, y se arrojó á manifestarlos con alguna acrimonia un Inglés, hombre que nun-

(r) *Mechanica, sive motus scientia, analytice exposita. Auctore Leonhardo Eulero, &c.* Dos tomos en 4. grande. Petersburgo 1736.

nunca pasó de Matemático mediano, si acaso llegó á serlo. "Pero estos pequeños lunares, dice el P. Fontana (s), „ que se notan en la excelente Mecánica de tan profundo „ calculador (al qual se puede aplicar con entera justicia „ y verdad el proverbio griego εις μυριοι) censurados con „ acrimonia por Benjamin Robins en su libro intitulado „ *Remarks on M. Euler Treatise of motion, by Benjamin Robins*, ningun perjuicio hacen á la profunda sabiduría y „ elevada penetracion de aquel grandísimo Geómetra, cuyas obras tan varias, originales y sublimes darán testimonio á la mas remota posteridad de que en el siglo décimooctavo el ingenio humano subió con el auxilio del „ Algebra y de la Geometría á una altura á que nadie pudiera jamas haber pensado que hubiese de llegar. Quan„ do

(s) „Questi piccioli nei, che s'incontrano nell' eccelente Meccanica d'un „ si profondo calcolatore, (al quale con tutta giustizia e verità può applicarsi il greco proverbio εἰς μυριοι) rilevati con acerbità da Benjamino Robins „ nel libro intitolato *Remarks on M. Euler Treatise of motion, by Benjamin Robins*, non fanno alcun torto all' immenso sapere e all'inarrivabile penetrazione di quel grandissimo Geometra, le di cui opere tanto varie originali „ è sublimi faranno fede alla più rimota posterità, che nel secolo decimoottavo l'ingegno umano a forza d'Algebra, è di Geometria è salito a „ tanta altezza, a cui niuno avrebbe creduto che potesse mai pervenire. „ Quando cotesto sig. Robins, che insulta l'illustre Giovanni Bernoulli, che „ trata da ignoranti i celebri Smith, è Jurin, che discende persino alla bassezza „ (*A Discourse contening nat. and certainty of Fluxions*) di tradurre il gran „ Newton per uomo imbrogliato è confuso, ci darà qualche cosa que vaglia „ la Meccanica del sig. Euler, allora noi gli perdoneremo la sua animosità, le „ sue critiche, e i suoi errori." P. Fontana *Altezze barometriche, pag. 33, nota g.*

„ do ese M. Robins, que insulta al ilustre Juan Bernoulli, „ que trata de ignorantes á los célebres Smith y Jurin, que „ por fin tiene la avilantez (*A Discourse concerning nat.* „ *and certainty of Fluxions*) de sindicar al gran Newton de „ hombre embrollado y confuso, nos diere alguna cosa suya „ que valga la Mecánica del Sr. Euler, entonces le disimu„ larémos su animosidad, sus críticas, y sus errores."

En el Prólogo de un tratado que habla de máquinas sería extraño omitir las advertencias que puedan precaver los engaños de muchos charlatanes que de quando en quando intentan engañar al público, pregonándose á sí mismos por portentosos maquinistas. Nos toca, pues, añadir aquí, antes de concluir, algunas consideraciones peculiares á la maquinaria, que nos dén ocasion de hacer patente la notable diferencia que va de un honrado maquinista á un tramposo aventurero.

No por ser mas sencilla que otras una máquina merece la preferencia, porque hay ocurrencias en que es forzoso preferir para obrar el efecto que se desea una máquina compuesta, á otra que sea de la mayor sencillez. Así, aunque la palanca es de todas las máquinas la mas sencilla y fundamental, á la qual se refieren, no habiendo ninguna que no se componga de palancas dispuestas de distintos modos, hay sin embargo lances donde no se puede hacer uso de ella. Si queremos, por egemplo, levantar á mucha altura una piedra de sillería para sentarla donde corresponde en una fábrica, ó quando queremos levan-

tar

tar otro cuerpo muy pesado á la altura de tres ó quatro pies, no sirve la palanca, y tenemos que apelar á las poleas. Estas, y sus diferentes combinaciones son tambien muy socorridas quando no cabe lugar para un cabestante; pero no son de uso alguno para levantar pesos muy grandes, porque no es posible obren juntos y todos igualmente muchos hombres asidos á una misma cuerda; y si se intenta aumentar mucho la potencia con multiplicar las poleas, se necesita una cuerda tan larga, que mas sirve de estorbo que de alivio. En la Arquitectura ocurren con mucha frecuencia casos en que un cabestante, bien que no dá su construccion mas ventaja que una polea compuesta, no dexa de ser mas provechoso, porque con el cabestante pueden hacer una maniobra ocho, diez ó doce hombres, siendo así que no pasan de tres ó quatro los que se pueden asir á la cuerda de una polea. " Si las quatro barras ,, de un cabestante, dice Desaguliers, fueren tan largas, ,, que tres hombres aplicando su fuerza en cada una, el ,, de en medio esté á tres pies del exe del movimiento, y ,, si el exe donde se arrolla la cuerda tuviese seis pulgadas ,, y media de diámetro, los doce hombres harán tanta ,, fuerza como setenta y dos, bien que en seis veces mas ,, tiempo.

Estas últimas palabras dan á entender un principio de maquinaria confirmado por la experiencia quotidiana, es á saber que no es posible aumentar la potencia sino á costa del tiempo, ni acelerar el efecto de una poten-

tencia, sino á costa de su intensidad: quanto mas pesado sea el fardo que lleva un mozo de esquina, tanto menos aprisa puede caminar; y quanto mas aprisa se quiere que ande, tanto menor ha de ser el peso que llevare. Por no haber tenido presente esta máxîma algunos maquinistas, han discurrido que la fuerza de una potencia estriba en la figura de la máquina á la qual se la aplica. Pero la Mecánica no nos enseña á crear las potencias, sí á aplicar las que encontramos en la naturaleza; porque sería halucinarnos el pensar que un hombre pueda obrar por medio de una máquina, sea la que fuere, el mismo efecto que otros dos trabajando juntos, y cada uno con la misma fuerza que él. No por eso dexamos de conocer que muchas veces tiene cuenta dar á una máquina antes una forma que otra; pero esto sucede quando va errada su construccion. Puede suceder, por egemplo, que las piezas de alguna máquina grande estén dispuestas de tal modo, que se consuma en vano *la mayor parte de la intensidad* de la potencia; como quando hay mas rozamiento del que debiera por estar mal construida toda la máquina, ó ser mala la figura de alguna de sus partes, ó por haberlas trabajado sin cuidado el artífice á quien se encargó; ó quando los hombres ó los animales obran con parte no mas de toda la fuerza que podrian gastar sin fatigarse, ó sin inconveniente. En todos estos casos un buen maquinista debe manifestar su habilidad variando la forma, ó alterando las partes ó el movimiento de la máquina.

Todo hombre que se dedica á hacer algun invento en la Maquinaria, debe tener presente que en la aplicacion de las máquinas hay límites que jamas se pueden pasar. Muchos que ignoran este principio fundamental, se empeñan en la invencion de máquinas á su parecer portentosas, con las quales esperan obrar efectos mas portentosos todavía. Pero con menos confianza procederian estos maquinistas, si supiesen que el efecto de la mejor máquina no puede exceder en un quinto al efecto de la peor. Una máquina mala es aquella que tiene sus materiales tan buenos, sus partes tan cumplidas, y su obra tan acabada como la mejor máquina, de la qual solo se diferencia en la invencion. Digo, pues, (habla Desaguliers) que si una potencia determinada levanta cierto peso en un tiempo señalado por medio de una máquina simple, no es posible inventar otro artificio con el qual levante la misma potencia un peso cinco veces mayor en el mismo tiempo, ó el mismo peso en un tiempo cinco veces mas breve. Parecerá una paradoxa esta proposicion á los que no están bastante impuestos en los principios mecánicos; porque se está viendo á cada paso que un mismo número de hombres ó de animales, ó una misma corriente de agua obra diez veces mas efecto con una máquina que con otra. Pero esto no proviene de ser de mejor invencion la una máquina que la otra: una fuerza perdida ó mal aplicada, malos materiales, rozamientos inútiles, el tirar en lineas oblicuas quando convendria tirar en lineas perpendiculares, anima-

les

les que trabajan en positura poco favorable, una corriente de agua mal aprovechada, toda la máquina mal sentada, &c.: estas son las verdaderas causas de tan notable diferencia. Todo esto proporciona á los arbitristas ignorantes muchas ocasiones de lucirlo unos á costa de otros con sus máquinas defectuosas. También hay supercherías entre los artífices como entre los literatos, y cometen igualmente sus plagios los maquinistas, quienes no siempre saben hacer buen uso de lo que roban. Un plomero se metió en hacer una máquina compuesta de dos tornos para levantar agua con dos cubetos en casa de un particular á la altura de 30 pies. Habia visto este oficial en otra máquina un volante, cuyo oficio era hacer el movimiento mas uniforme y regular; y creyendo que el destino del volante era aumentar la fuerza hizo uso de él, y en lugar de aplicarle en el parage de su máquina donde el movimiento era mas veloz, le aplicó donde el movimiento era mas lento. El particular para quien se habia *hecho la nueva máquina* me la enseñó (dice Desaguliers); y viendo que con ella trabajaban mucho quatro hombres para levantar el agua, no hice mas que quitar el volante, y entonces un hombre solo hacia con mas facilidad la maniobra que antes los quatro juntos. A veces artífices ignorantes discurren una máquina defectuosa, y reparando que no obra el efecto deseado, y cavilando discurren al último otro modo de lograrle; entonces se envanecen, y se les figura tanto mas excelente su descubrimiento, quanto el efecto corresponde mejor á sus es-

esperanzas ; siendo así que si la primera máquina hubiera sido executada como debia , no hubiera discrepado sino muy poco de la nueva.

Un arbitrista que solicitaba un privilegio para un descubrimiento nuevo (no era ni nuevo ni suyo) enseñó su máquina á un sugeto con cuyo influxo esperaba obtenerle, el qual me dixo que un artífice le habia enseñado un modelo para las ruedas de los carruages tan perfecto , que los hacia caminar veinte ó treinta veces mas aprisa de lo que solian. Yo que sabia quan imposible era esto , quisé ver el modelo , y como aquel caballero no quisiese manifestármele , encargué á un amigo mio muy inteligente le reconociese , quien me dixo que el modelo que representaba los carruages ordinarios , y con el qual se comparaba la nueva máquina , era sumamente defectuoso , y siete ú ocho veces peor de lo que debiera , teniendo las ruedas y los eges muy irregulares. No era , pues , de estrañar que la nueva máquina llevase mucha ventaja á lo que el charlatan llamaba carruages comunes ; pero todo era un engaño ; si habia alguna ventaja , era de cortísima consideracion , y el efecto correspondia á la futilidad del invento. Tambien he conocido pícaros , que mediante algun artificio secreto , se vanagloriaban de haber encontrado el movimiento perpetuo , ó por lo menos principios de donde inferirle ; pero todo su empeño , todo su talento se reducia á sacar dinero á los tontos.

En la Arquitectura Civil y Militar , y en todas las obras

obras donde no se hace uso del impulso del agua, son mas leves y mas fáciles de enmendar los errores mecánicos que se cometen. A los Arquitectos é Ingenieros toca estar enterados del uso de los órganos mecánicos; y como se les ofrecen pocas maniobras en que tengan escaso el tiempo y el espacio, pueden aumentar el efecto de la potencia, disminuyendo respectivamente la velocidad del peso: y esto porque son dueños de darse tiempo y espacio.

Acaso se nos preguntará de donde proviene que teniendo la maquinaria, segun afirmamos, principios fixos, sean tan pocas las máquinas dignas de aprobacion, ó que corresponden á las magníficas promesas de sus inventores? La respuesta es muy facil.

Si todos los que se dedican á maquinistas juntasen con la honradez el tino que para esta profesion se requiere, y las noticias matemáticas y físicas que deben dirigirle, no habria motivo de hacer la pregunta. La desgracia está en que de los que se meten á maquinistas, los unos no son mas que matemáticos, y los otros no tienen instruccion ninguna.

No se puede negar que entre estos últimos ha habido hombres dotados de tan felices disposiciones para la maquinaria, que sin el auxílio de la Matemática y de la Física discurrieron admirables invenciones, pero no las reduxeron á reglas fixas sino en virtud de observaciones que sobre ellas hacian despues de puestas en estado de obrar. Estos hombres, exâminando con cuidadosa porfia

cada cosa separadamente, llegaron á conocer muchas relaciones y propiedades de los cuerpos, y suplieron su ignorancia con una especie de Matemática natural, que es el tino que decíamos. Tales fueron en Inglaterra Hadley y Sorocold, los únicos maquinistas que tuvo aquella Nacion en el siglo pasado. No erraron máquina ninguna, porque primero que pensasen en lo que les habia de valer, hacian empeño de que saliese á propósito para el efecto al qual la destinaban. "Hoy dia no se ven sino arbitristas, ,, y ningun verdadero ingeniero, los quales no proponién- ,, dose mas objeto que ganar mucho con una obra mala, ,, executan las cosas aprisa, y con tantos defectos, que ,, bien se echa de ver que todo su fin es deshacerse luego ,, de su obra, y muchas veces empeñan á los particulares ,, en gastos inútiles que los arruinan." Apenas hay albañil ó tramoyista que no se tenga hoy dia por ingeniero, y se encargue ó solicite encargarse de la construccion de un molino. Sin embargo acaso no hay dos que sepan como debe medirse la cantidad de agua necesaria para que ande un molino, sea de la especie que fuese; todos se contentan con formar juicio de la corriente á ojo.

Tampoco salen siempre acertadas las máquinas que inventan los Matemáticos, los quales suelen tener mas conocimiento de la Matemática pura que de la mixta, y no están enterados de la operacion manual. Pero esto proviene las mas veces de la ignorancia ó de la malicia de los artífices de quienes se valen. Porque el Matemático des-

despues que ha dado todas las vueltas necesarias á su pensamiento, y calculado la intensidad de la potencia y del peso, suele fiar la execucion de muchas partes de su máquina á diferentes oficiales. El oficial ignorante se encarga de hacer lo que no entiende; el oficial picaron procura desacreditar el invento, executando mal lo que tomó á su cargo, porque no es suyo ni el pensamiento ni el modelo. Hay entre los artífices una especie de empeño de ocultar como un arcano su arte, y miran como un mal compañero al que manifiesta á otros su modo de trabajar, y el precio de los materiales. Llaman hombres de teórica á los Matemáticos y Físicos, corriendo entre ellos muy valida una máxima tan comun como falsa, y es que muchas cosas que son verdaderas en la teórica, no lo son en la práctica. La causa de esto es que suelen dar el nombre de teórica á unas luces muy superficiales que solo enseñan proporciones generales; y siendo incompleto el pensamiento, no es maravilla que salga errada la execucion.

El maquinista que deseare tener completa la teórica que necesita, debe ser inteligente en obras de mampostería, de carpintería, de hierro, en apreciar las fuerzas, debe conocer la duracion y la coherencia de los cuerpos, saber formar no solo una traza general de toda la máquina, mas tambien el dibuxo particular de cada una de sus partes, expresando las mas mínimas por medio de un pitipie exácto, á fin de que antes de poner por obra el pensamiento, se pueda formar puntual juicio de cada una de ellas. Si

el que se encarga de alguna máquina grande supiere bastante Matemática para calcular el efecto que ha de obrar la potencia, rebaxando lo necesario por razon del rozamiento y otros óbices; si tuviere de la práctica suficiente conocimiento para fiscalizar á los oficiales, y ver si executan con cuidado y puntualidad lo que se les ha encargado; entonces saldrá seguramente la práctica muy ajustada á la teórica, sin discrepar ni un ápice una de otra.

Muchas veces se yerra una máquina sin culpa del Matemático ni del artífice, siendo la única causa del daño la miseria del particular que se la encarga. Hay muchos miserables, pero vanos, que decantan la pretendida discrepancia entre la teórica y la práctica, con la mira de dar su confianza, pensando que gastarán menos, á ignorantes, á quienes ellos de su autoridad gradúan de hombres de mucha práctica y grandes experiencias. El éxito siempre sale qual corresponde; se yerra el intento, y se gasta doblado, sucediendo lo mismo que á la gente pobre, que por no gastar en visitas de médico, se cura con un boticario.

ER-

ERRATAS.

De los Prólogos de los tomos antecedentes.

TOMO I.

Pág.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
V	11	1771........	1776.
XIV	19 y 20	lugar.......	lunar,

TOMO III.

XXIV	10	Maulaurin.....	Maclaurin.
XXV	5	que le........	que con él.
XXXII *nota.*	6	agradar........	agradecer.

ER-

ERRATAS.

Pág.	Linea.	Dice.	Léase.
6	24	quanto mas dismi- nuye.	quanto mas se dismi- nuye.
15	21	quando las veloci- dades.	quando las masas.
16	1	espacios	tiempos.
16	1	tiempos	espacios.
28	8	cae en un........	cae un.
43	22	será	serán.
57	21	del punto........	de un punto.
65	17	de esta	respecto de esta.
88	16	en él	en ella.
107	9	paralela *PQ*......	paralela á *PQ*.
119	16, 17	$KK' + S.dx$......	$KK' \times S.dx$.
123	11, 19, 20	$AF + HD$	$AF - HD$.
125	3	del ege.........	al ege.
125	9	$= K \times S.du$.......	$= K' \times S.du$.
128	11	artificios la	artificios á.
155	16	$\frac{a+2bx}{b} pdt$.........	$\frac{a+2Px}{b} pdt$.
155	18	$\frac{adx+2bxdx}{b} p$	$\frac{adx+2Pxdx}{b} p$.
159	15	$(A + B \text{ sen}^2 A)$....	$(A + B \text{ sen}^2 a)$.
163	19	*EK* ó *AL*.......	*FK* ó *AL*.

Pág.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
165	2	$+ D \text{ sen}^2 C$	$+ D \text{ sen}^2 c$.
165	4	$+ D \text{ sen}^2 C$	$+ D \text{ sen}^2 c$.
166	8	el punto *F*	el punto *E*.
182	5	4348,25146 ...	4348,25235.
182	6	á la margen cítese la fig. 84.	
191	1	c y c'	C y C'.
205	4	$-md$	$-mn$.
206	4	$+\frac{dy}{dt}Pdt$	$\frac{dy}{ds}Pdt$.
207	12	MS	Ms.
208	24	$= -\frac{HK}{z}$	$= -\frac{ffK}{z}$.
212	22	$+\frac{ffK}{2}$	$+\frac{2ffK}{z}$.
214	6	$\frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z'}$	$\frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z}$.
217	15	BM'	BM.
220	2	$z + x'$	$z + z'$.
227	3	resolucion.	revolucion.
228	13	$\frac{2cy''}{\sqrt{\left(\frac{Py'dz}{dy''}\right)}}$	$\frac{2cy''}{\sqrt{\left(\frac{py'dz}{dy''}\right)}}$.
231	5	$+M'' \times M''s'' \times CM''$	$-M'' \times M''s'' \times CM''$.
239	14	distancia *C*.	distancia de *C*.
239	16	*CD*	$C = D$.
240	22	*M*.	*N*.
247	1	y por $R \times D$.	y $R \times D$.
247	15	*CS*.	*TS*.
248	23	partes *L*.	partes de *L*.
251	5	GC'	GG'.
254	15	$= \frac{P}{P+p}z$	$= \frac{p}{P+p}z$.

Pág.	Linea.	Dice.	Léase.
255	20	$z = \frac{1}{u}$ &c.	$z = \frac{1}{n}$ &c.
256	4	G.	G'.
261	20	Cg'.	Gg'.
261	26	$-2px \times Gg' - pp'$	$-2p \times Gg' \times pp'$.
262	14	$p'n = p'G$ sen b. . .	$p'n = p'G$. sen b'.
272	2	$nDSu^2dt$.	$nDsu^2dt$.
277	1	$A = 1$.	$Aa = 1$.
279	21	$d\left(\frac{Kdt}{dt}\right)$.	$d\left(\frac{Kdx}{dt}\right)$.
283	12	$gy + gydt$ &c.	$dy + gydt$ &c.
284	22	$dt = \sqrt{\left[-\frac{dx}{p} + d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}$	$dt = \sqrt{\left[-\frac{dx}{p} d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}$.
295	7	ADC.	DAC.
301	19	$ad = NC$.	$nd = NC$.
306	16	cono.	caso.
328	27	LIZ.	LZ.
333	16	la tierra.	la barra.
381	7 y 8	KE.	Ke.
396		á la margen bórrese 192.	
415	17	$M(M-v) \times R$.	$M(V-v) \times R$.
422	11	aumentar.	mudar.
442	26	150.	120.
443	2	210.	240.
489	11	movimiento.	rozamiento.
499	20	BP.	CP.
506	3	$MKK + \frac{f}{b}$.	$MKK \times \frac{f}{b}$.
506	ult.	$Qbb - tQbb$.	$Qbb + tQbb$.
508	9	BQ.	BP.

Pág.	Linea.	Dice.	Léase.
514	6	$\sqrt{(bb - a^3)}$......	$\sqrt{(bby - a^3)}$.
514	8	$= a^3x$.........	a^3x^2.
515	6	$MG =$.........	Mm.
516	8	$(AM)^2$..........	$(MG)^2$.
525	18	$\frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$.........	$\frac{xdx}{\sqrt{(xx - aa)}}$.
528	14	$= \frac{aadx}{4ax}$..........	$\frac{aadx^3}{4ax}$.
531	26	Mp.............	MP.

IN-

INDICE

De lo que se contiene en este Tomo.

Del

Del

ELE-

ELEMENTOS DE DINÁMICA.

Nociones Preliminares.

1 ASI como los cuerpos que conocemos, indiferentes de suyo para moverse ó estarse quietos, nunca jamas se moverian sin el impulso de alguna causa, potencia ó fuerza que les comunica algun movimiento; tampoco nunca jamas dejarian de moverse, una vez sacados del estado de reposo, y se moverian eternamente, si no encontráran en su movimiento cuerpos con que chocar que le destruyen indefectiblemente; porque no hay en la naturaleza de los cuerpos, ó á lo menos no la alcanzamos, propiedad, causa ó virtud ninguna que los haya de reducir al estado de reposo. Hay tambien circunstancias particulares en que la accion de un cuerpo en otro que se mueve, lejos de destruir su movimiento, le ocasiona todavia mayor. Son, pues, muchos los casos que ofrece á nuestra consideracion el movimiento de los cuerpos; pero sea la que fuere su multitud y variedad, todos ellos forman el objeto de la ciencia conocida con el nombre de *Dinámica*, cuyo asunto es tratar del movimiento de los cuerpos en quanto le produce, aumenta ó destruye la accion mutua de unos en otros. Pero no significa la voz *Dinámica* en el sentido comun, en que nosotros la usaremos tambien, sino la ciencia que considera quanto pertenece al movimiento de los

sólidos, de todos aquellos cuerpos cuyas partes, *moléculas*, partículas ó partecillas tienen mucha adherencia unas con otras, y se resisten quando intentamos destruir su adhesion recíproca; habiéndose inventado, para mayor claridad, otra voz con que distinguir la ciencia que trata del movimiento de los fluidos, de todos aquellos cuerpos entre cuyas partes, moléculas ó partecillas no hay adherencia, y que será el asunto del Tomo siguiente.

2 Desde los primeros renglones de este tratado nos importa avisar á nuestros lectores procuren guardarse de una preocupacion de la qual les cuesta á algunos entendimientos bastante trabajo desprenderse. Como no se ve cuerpo ninguno que no sea pesado, muchos creen que la *pesantez* ó el ser pesada es esencial á la materia; y que *peso* y *cuerpo* son dos voces synónimas. Pero se equivocan: la *pesantez* es un accidente de los cuerpos que proviene de una causa particular, y la voz *cuerpo* no significa mas que una estension impenetrable de estas ó aquellas dimensiones.

3 Quando un cuerpo permanece constantemente en el mismo lugar del *Espacio*, está en *Reposo*; pero quando pasa de un lugar á otro, está en *Movimiento*, y el movimiento es tanto mayor, quanto menos tiempo gasta el cuerpo en pasar de un lugar á otro, ó quanta mas velocidad tiene el cuerpo ó se mueve mas aprisa.

Para dar á conocer con la exactitud y claridad que corresponde el tiempo y el espacio, distinguirémos dos especies de tiempo y dos especies de espacio; es á saber, el

Tiem-

Tiempo absoluto, y el *Tiempo relativo*; el *Espacio absoluto*, y el *Espacio relativo*.

4 El tiempo absoluto, verdadero y matemático, sin relacion con cosa alguna esterior, corre *uniformemente* ó *igualmente*, y se llama *Duracion*.

Así como en Geometría considerámos la linea como formada del rastro de un punto, podemos tambien considerar el tiempo absoluto como formado del curso, fluxion ó rastro, digamoslo así, succesivo y uniforme del *Instante*, que es una parte infinitamente pequeña de dicho tiempo.

El tiempo relativo, aparente y vulgar, es la medida visible y esterna de una parte qualquiera de duracion, igual ó desigual, sacada del movimiento: tales son las medidas de horas, de dias, de meses, &c. de que usamos comunmente en lugar del tiempo verdadero.

5 El espacio absoluto, sin ninguna relacion con las cosas esternas, se queda siempre *similar* é inmobil; quiero decir, que es siempre parecido á sí mismo, y que sus partes guardan al infinito sus mismas situaciones respectivas en todas las direcciones.

El espacio relativo es aquella medida ó dimension mobil del espacio absoluto que perciben nuestros sentidos por medio de su relacion con los cuerpos, y que el vulgo confunde con el espacio inmobil. Así, por exemplo, un espacio tomado dentro de la tierra ó en el Cielo, está determinado por la situacion en que está respecto de la tierra.

6 Llamamos *Lugar* la parte del espacio que un cuerpo ocupa, y segun que el espacio es absoluto ó relativo, es tambien el lugar *absoluto* ó *relativo*.

Decimos que el lugar es una parte del espacio, y no la situacion del cuerpo, ó la superficie que le circunda; porque los sólidos iguales siempre ocupan lugares iguales, bien que sus superficies sean comunmente desiguales, por razon de la diferencia de sus formas; las situaciones, hablando con rigor, no tienen cantidad, son afecciones de lugares, y no lugares verdaderamente tales.

7 Así como hay dos especies de tiempos y espacios, hay tambien dos especies de reposo y de movimiento; es á saber, el *Reposo absoluto*, y el *Reposo relativo*; el *Movimiento absoluto*, y el *Movimiento relativo*.

El reposo absoluto de un cuerpo es la permanencia de dicho cuerpo en un mismo lugar del espacio absoluto; y el reposo relativo es la permanencia del cuerpo en un mismo lugar del espacio relativo.

8 El movimiento absoluto es la traslacion de un cuerpo desde un lugar del espacio absoluto á otro lugar; y el movimiento relativo es la traslacion de un cuerpo desde un lugar del espacio relativo á otro lugar.

El movimiento absoluto y el movimiento relativo tienen unas mismas propiedades, bien que puede haber el uno sin el otro. Supongamos, por egemplo, que se mueva un navio de poniente á oriente, es evidente que si un hombre permaneciere en el mismo lugar del navío, no tendrá

mo-

movimiento ninguno respecto del navio; pero estará en movimiento en el espacio absoluto, pues camina con el navio de poniente á oriente. Pero si al paso que el navio navega de poniente á oriente, un hombre anda en el navio con igual velocidad de oriente á poniente, es evidente que este hombre se moverá respecto del navio, pero estará en reposo en el espacio absoluto, porque siempre corresponderá á los mismos puntos de dicho espacio.

9 El *agente* que comunica movimiento á un cuerpo, ó que destruye el movimiento que el cuerpo tenia, se llama *Fuerza* ó *Potencia*. El efecto de la fuerza considerado como existente en el agente, se llama *Accion*, y considerado como recibido en el cuerpo se llama *Impresion*.

10 La fuerza se divide en *Fuerza muerta* y *Fuerza viva*.

Llamamos fuerza muerta aquella que solicita á moverse un cuerpo que algun obstáculo fijo detiene, y que por consiguiente no produce ningun movimiento actual; tal es la gravedad que impele un cuerpo puesto encima de una mesa orizontal. Llamamos tambien fuerza muerta, y mas comunmente *Presion*, una fuerza que no puede producir ningun movimiento actual, sino despues de haber obrado un tiempo finito, tal es cada accion instantanea y sola de la gravedad en un cuerpo que cae libremente.

La fuerza viva es la que reside en un cuerpo que se mueve actualmente. Se puede considerar como la suma de una infinidad de presiones acumuladas.

El *Equilibrio* es el estado de un cuerpo, ó de un conjunto, agregado ó *systema* de cuerpos impelido de varias fuerzas, cuyos efectos contrarrestan algunos obstáculos, ó se destruyen mutuamente.

Leyes del Movimiento.

11 Ley I. *Ningun cuerpo apetece de suyo el movimiento ó el reposo, y por consiguiente debe perseverar en su estado de reposo ó de movimiento uniforme, á no ser que le saque de él alguna causa esterior.*

Porque la materia es un ente inanimado, tan incapaz de darse movimiento á sí mismo, como de mudar en manera alguna el que se le puede haber comunicado. La esperiencia está tambien por esta ley. Los movimientos de los cuerpos arrojados, que llamamos *Proyectiles*, duran hasta que los disminuye poco á poco la resistencia del ayre, y la accion ó impulso de la gravedad, que al fin dá con los proyectiles en tierra. Un trompo, cuyas partes se apartan unas á otras de la linea recta, en virtud de su coherencia recíproca, no acaba de dar vueltas, sino porque la resistencia del ayre, y las asperezas del plano en que está le retardan. Los planetas y los cometas, que son cuerpos mucho mayores, y se mueven en espacios que resisten menos, guardan mucho mas tiempo sus movimientos progresivos y circulares &c. En general, quanto mas disminuye el número de los obstáculos contrarios al movimiento de un cuerpo, tanto mas dura el movimiento; por manera que

sí

si llegára á ser nula de todo punto la resistencia de los obstáculos, el movimiento se perpetuaría por sí solo al infinito.

12 Ley II. *Las mudanzas ó variaciones que le sobrevienen al movimiento de un cuerpo son proporcionales á la fuerza motriz, y se hacen en la linea recta, en cuya direccion obra dicha fuerza.*

La primera parte de esta ley es evidente. Eslo tambien la segunda; porque una vez que para el cuerpo le es indiferente moverse tanto ácia un lado como ácia otro, es preciso que siga el rumbo de la fuerza que le impele ácia su direccion; ora le dé dicha fuerza un solo impulso, ora le dé muchos succesivos. Una vez determinado el cuerpo á moverse ácia la direccion de la fuerza motriz, al movimiento que esta le comunicare se añadirá el movimiento que antes tuviese el cuerpo, si le encaminase ácia un mismo lado; ó se le quitará, si le encaminase ácia un lado opuesto; ó solo se le añadirá ó quitará una parte, si le encaminase ácia una direccion oblicua respecto de la primera: en este último caso el rumbo que el cuerpo siguiere participará de las dos primeras direcciones.

13 Ley III. *La reaccion es siempre igual y contraria á la accion.*

Todo cuerpo que solicita otro cuerpo, está solicitado de él al mismo tiempo. Si yo empujo una piedra con el dedo, la piedra empuja al mismo tiempo mi dedo. Si un caballo tira de una piedra por medio de una cuerda, tambien á él le ti-

ra la cuerda; porque la cuerda que los une y está tirante por ambos lados, hace igual fuerza para arrastrar la piedra ácia el caballo, y el caballo ácia la piedra; y este conato tanto se opone al movimiento del uno, como causa movimiento en el otro. Lo propio digo de la accion y reaccion de los cuerpos que se chocan ó se comunican de un modo qualquiera, parte de sus movimientos.

14 De estas leyes resulta que todo cuerpo se resiste á mudar de estado, sea para pasar del movimiento al reposo, ó para pasar del reposo al movimiento, y opone una resistencia proporcional á su masa.

Esta resistencia se llama fuerza de *Inercia*, de la voz latina *inertia*, para dar á entender que un cuerpo está como perezoso en su estado, ó tiene pereza para mudarle. Esta fuerza de inercia le corresponde á la materia por razon de su indiferencia para moverse ó estarse quieta. Porque ya que ningun cuerpo puede pasar del movimiento al reposo, ó del reposo al movimiento (11) sino por la accion de una causa esterna, y toda accion supone (13) una reaccion igual y contraria; se sigue que el cuerpo se ha de resistir á mudar de estado. Y como no hay razon alguna para que esta resistencia resida en una molécula ó partecilla del cuerpo, y no en otra; es consiguiente que sea comun á todas las moléculas; luego la inercia total es la suma de todas las inercias particulares, y es por consiguiente proporcional á toda la masa del cuerpo.

Algunos Filósofos escolásticos quieren que la fuerza

de

de inercia sea un efecto de la gravedad ó pesántez de los cuerpos; pero se engañan de medio á medio, y lo está manifestando la esperiencia. Movamos, por egemplo, un cuerpo sobre un plano orizontal perfectamente igual y liso; es evidente que la pesantez no tiene entonces por donde manifestar su efecto. No obstante esperimentamos una resistencia, y esta resistencia es siempre cabalmente proporcional á la masa. Si este esperimento no bastáre, acudirémos á otro. Supongamos un cuerpo que cae libremente á impulsos de su pesantez; si le damos con la mano para que cayga mas aprisa, esperimentaremos tambien resistencia. Pero esta resistencia no puede provenir de la pesantez, porque el impulso de la pesantez coadyuva al de la mano, lejos de serle contrario; luego la fuerza de inercia es una calidad particular de la materia, absolutamente distinta de la pesantez.

La fuerza de inercia es un medio para que los cuerpos se comuniquen el movimiento unos á otros. No hay cuerpo que no se resista al movimiento: quando se resiste se le comunica, y se le comunica tanto cabalmente como pierde el cuerpo que le impele ó choca.

15 Para sentar los principios del movimiento y del equilibrio, imaginaremos primero que no existe en la naturaleza otra cosa mas que los cuerpos de que hablaremos, y las fuerzas que supusiéremos obrar en ellos. Así, consideraremos los cuerpos como nada pesados; como perfectamente libres: supondremos que no se opone á su movimiento ni el ayre, ni la gravedad, ni el rozamiento, ni otro obs-

tá-

táculo qualquiera. Despues atenderemos á estos obstáculos; pero para poder apreciar despues sus efectos, es indispensable prescindir de su influxo por ahora.

16 En virtud de todos estos supuestos, se echa de ver que si una causa qualquiera le comunicare movimiento á un cuerpo, habrá de permanecer en este estado de movimiento, sin la menor alteracion, ni aumento, sin desvio ninguno, con tal que no prosiga obrando en él la misma ú otra causa. Porque segun hemos dicho, un cuerpo no puede darse movimiento á sí mismo; luego tampoco podrá quitársele, pues esto sería darse movimiento ácia una direccion contraria: por otra parte suponemos que no existe obstáculo ninguno; luego &c.

Por consiguiente el movimiento es naturalmente igual ó uniforme, y rectilineo. Averiguemos, pues, primero las circunstancias de este movimiento.

Del Movimiento uniforme.

17 Es, pues, el *Movimiento uniforme* el movimiento de un cuerpo que se mueve siempre de un mismo modo: esto es, que anda siempre un mismo espacio en un mismo intervalo de tiempo.

Para comparar los movimientos de dos cuerpos que se mueven uniformemente, se debe considerar el espacio que andan en un mismo tiempo determinado, como de un minuto, de un segundo &c. Este espacio es lo que llamamos *Velocidad*.

Es,

18 Es, pues, hablando con propiedad, la velocidad de un cuerpo el espacio que dicho cuerpo puede andar uniformemente en un tiempo determinado, que llamarémos la *Unidad de tiempo.* Si en los movimientos uniformes de dos cuerpos se cuenta el tiempo por segundos; y anda el uno 5 pies por segundo, y el otro 6 pies por segundo; dirémos que la velocidad del primero es de 5 pies, y la del segundo de 6 pies.

Qualquiera podrá hacerse cargo, sin que lo prevengamos, de que la velocidad no es una cantidad absoluta, sino relativa á otra velocidad. La razon entre las dos velocidades es la misma que hay entre los espacios que andan en tiempos iguales los dos cuerpos á que pertenecen.

19 Pero si en el supuesto de ser siempre el segundo la unidad de tiempo, nos digeran que un cuerpo ha andado 100 pies en 5 segundos, 100 pies no espresarían la velocidad, pero echaríamos de ver que en cada segundo andaria la quinta parte ó 20 pies; quiero decir que para conocer la velocidad, partiríamos el número 100 de las partes del espacio andado, por el número 5 de las unidades del tiempo en que las hubiese andado. Luego, en general, la velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo. Por consiguiente si llamamos V la velocidad, E el espacio andado en un tiempo determinado T, tendremos la espresion general $V = \frac{E}{T}$; este es uno de los principios fundamentales de toda la Dinámica.

20 La equacion $V = \frac{E}{T}$ dá no solo la medida de

la

la velocidad, sino tambien la del espacio y la del tiempo. Porque si consideramos succesivamente E y T como incógnitas, sacaremos $T = \frac{E}{V}$, y $E = VT$. De lo que resulta que *el tiempo es igual al espacio dividido por la velocidad, y que el espacio es igual al producto de la velocidad por el tiempo.*

21 Es, pues, facil comparar en virtud de esto los movimientos uniformes de dos ó mas cuerpos. Por egemplo, si se nos preguntára en qué razon están las velocidades de dos cuerpos que andan espacios conocidos E y e, en tiempos conocidos T y t respectivamente; llamarémos V y u las velocidades de estos dos cuerpos, y tendrémos (19) $V = \frac{E}{T}$, y $u = \frac{e}{t}$; luego $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; quiero decir que *las velocidades son como los espacios divididos por los tiempos.*

En una palabra, quando se quisieren comparar las velocidades, ó los espacios, ó los tiempos, el principio que hemos sentado dará la espresion de cada una de estas cosas respecto de cada cuerpo, y para hallarlas bastará comparar estas espresiones. Si queremos comparar, por egemplo, los espacios, el principio dá $V = \frac{E}{T}$, de donde sale $E = VT$; luego respecto del segundo cuerpo tendremos igualmente $e = ut$; luego $E : e :: VT : ut$; cuya proporcion está diciendo que *los espacios son como las velocidades multiplicadas por los tiempos.*

22 Si de estas tres cosas, el espacio, el tiempo y la velocidad, queremos comparar dos, siendo la tercera una mis-

misma en cada cuerpo; lo conseguiremos buscando igualmente la espresion de esta tercera respecto de cada cuerpo, é igualando una con otra las dos espresiones. Por egemplo, si queremos averiguar la razon de los espacios, quando es una misma en cada cuerpo la velocidad, una vez que, segun suponemos $V = u$, y $V = \frac{E}{T}$, y $u = \frac{e}{t}$; $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$, ó $Et = eT$, de donde se saca $E : e :: T : t$; esto es, que *quando son iguales las velocidades, son los espacios como los tiempos*. Por el mismo método se sacará que *quando los tiempos son iguales, los espacios són como las velocidades*; y que *los cuerpos no pueden andar un mismo espacio, si no estubieren sus velocidades en razon recíproca de los tiempos*. Y de hecho ya que $E = VT$, y $e = ut$, si $E = e$, saldrá $VT = ut$, de donde sale $V : u :: t : T$.

De las Fuerzas, y de la cantidad del Movimiento.

23 Segun insinuamos tiempos há (I. 738), llamámos *Masa* de un cuerpo la suma de las partes materiales de que se compone; pero todas las veces que usáremos esta voz, por ella entenderemos el número que espresa de quantas partes materiales se considera compuesto un cuerpo.

Es la fuerza, segun llevamos dicho, la causa que mueve ó intenta mover un cuerpo. Como las fuerzas no se manifiestan sino por sus efectos, solo á estos hemos de atender quando las quisiéremos medir. Y como el efecto de una fuerza consiste en comunicar á cada partícula material de un cuerpo cierta velocidad, se sigue que si todas

das las partículas reciben la misma velocidad, como es natural suponerlo, el efecto de la causa motriz se medirá por la velocidad multiplicada por el número de las partes materiales del cuerpo, esto es, por la masa. Luego la fuerza se mide por la velocidad que puede comunicar á una masa conocida multiplicada por la misma masa.

24 El producto de la masa de un cuerpo por la velocidad se llama la *Cantidad de movimiento* de dicho cuerpo. Se miden, pues, las fuerzas por la cantidad de movimiento que son capaces de producir. Y así, si representamos este producto por F, la masa por M, y la velocidad por V; tendrémos $F = MV$.

De esta equacion nacen estas dos $V = \frac{F}{M}$, y $M = \frac{F}{V}$; de las que se infiere 1.° que *dada la fuerza motriz de un cuerpo y su masa, se hallará la velocidad con que se moverá, partiendo la fuerza motriz por la masa.* 2.° Que *dada la fuerza motriz y la velocidad, se hallará qual es la masa que puede tener dicha fuerza motriz y dicha velocidad, dividiendo la fuerza por la velocidad.*

25 Por consiguiente si f representa la fuerza motriz de otra masa m, y u la velocidad de esta masa; sacarémos igualmente $f = mu$; luego $F : f :: MV : mu$; quiero decir que *las fuerzas motrices son como las masas multiplicadas por las velocidades.*

Y si de cada una de las dos equaciones $F = MV$, y $f = mu$, se sacan los valores de M y de m, y despues los de V y u, se inferirá la razon de las masas por medio de la de las

las fuerzas y de las velocidades, y la de las velocidades por medio de las fuerzas y las masas; de lo que resultará 1.° que *siendo iguales las masas, las fuerzas motrices son como las velocidades*; 2.° que *siendo iguales las velocidades, son las fuerzas motrices como las masas*; 3.° que *si las fuerzas motrices fueren iguales, serán las velocidades en razon recíproca de las masas*; todo esto se puede verificar con gràn facilidad con igualar succesivamente el valor de M al de m; el de V al de u; y finalmente el de F al de f. La equacion que resultare, reducida y puesta en proporcion, demostrará cada una de estas tres proposiciones.

26 De la proposicion (21) $V : u :: \frac{E}{T} ; \frac{e}{t}$ sacaremos $VTe = utE$; y de (25) $F : f :: MV : mu$, $Fmu = fMV$. Si multiplicamos una por otra las dos equaciones, resultará $FTme = ftME$.

27 Luego 1.° *Si las masas estuvieren en razón inversa de las velocidades, las fuerzas serán iguales.* Porque en este supuesto será $M : m :: u : V$, y $MV = mu$; si dividimos el primer miembro de $Fmu = fMV$ por mu, y el segundo por MV, sacaremos $F = f$.

28 2.° *Quando las velocidades están en razon recíproca de los espacios, las fuerzas están en razon recíproca de los tiempos.* Porque por el supuesto será $M : m :: e : E$; luego $ME = me$; si dividimos el primer miembro de $FTme = ftME$ por me, y el segundo por ME, sacaremos $FT = ft$, y $F : f :: t : T$.

29 3.° *Si las masas fueren iguales, y los quadrados de*

de los espacios fuesen como los cubos de los tiempos, las fuerzas serán en razon recíproca de las raices quadradas de los espacios. Porque el supuesto dará $M = m$, y $T^2 : t^2 :: E^3 : e^3$, ó $T : t :: E\sqrt{E} : e\sqrt{e}$; luego $Te\sqrt{e} = tE\sqrt{E}$; si dividimos el primer miembro de $FTme = ftME$ por $mTe\sqrt{e}$, el segundo por $MtE\sqrt{E}$ saldrá $\frac{F}{\sqrt{e}} = \frac{f}{\sqrt{E}}$, y $F : f :: \sqrt{e} : \sqrt{E}$.

30 En este lugar nos toca prevenir que la masa ó el número de partes materiales de un cuerpo, pende de su volumen, y de lo que llamamos *Densidad.* Como hay en los cuerpos muchos huecos llamados poros, la cantidad de su materia no es proporcional á su volumen; pero siendo uno mismo el volumen, hay tanta mas materia, quanto están mas apretadas las partes; y esta mayor ó menor proximidad de las partes es lo que se llama *densidad.* De suerte que se dice de un cuerpo que es mas denso que otro, quando en volumen ó tamaño igual contiene el primero mas materia que el otro; y se dice que es menos denso ó mas raro, quando el volumen igual contiene menos materia.

Sirve, pues, la densidad para formar juicio del número de las partes materiales quando es conocido el volumen; por lo que se puede considerar como que representa el número de partes materiales de un volumen determinado: quando decimos que el oro es diez y nueve veces mas denso que el agua; queremos decir que contiene el oro diez y nueve veces mas partes, que contiene el agua en un mismo espacio.

Si

Si concebimos que la densidad espresa el número de partes materiales de un volumen determinado que se toma por unidad de volumen; es evidente que para hallar la masa, ó el número total de las partes materiales de un cuerpo cuyo volumen es conocido, se debe multiplicar la densidad por el volumen. Por egemplo, si 19 representa la densidad de una pulgada cúbica de oro, la cantidad de materia de 10 pulgadas de oro cúbicas, será 10 veces 19. Y así, representando generalmente por M la masa, el volumen ó la solidez por S, y la densidad por D, tendremos $M = S \times D$; cuya equacion servirá para comparar las masas, los volúmenes, y las densidades de los cuerpos.

31 Si llamamos m la masa de otro cuerpo, d su densidad, s su volumen, tambien será $m = s \times d$. Luego podremos sacar $M : m :: S \times D : s \times d$; esto es, que *las masas están en razon compuesta de los volúmenes y las densidades.*

32 *Quando las masas son iguales, las densidades están en razon inversa de los volúmenes*; porque entonces $S \times D = s \times d$; y por consiguiente $D : d :: s : S$.

33 Claro está que la densidad es una calidad meramente relativa; quiero decir, que no graduamos un cuerpo de denso sino porque lo comparamos tácita ó espresamente con otro cuerpo. No obstante muchas veces hablamos como si representase la densidad una calidad absoluta; como quando decimos que *la densidad es igual al cociente de la masa dividida por el volumen, ó que la masa es igual al producto del volumen por la densidad.*

Veremos dentro de poco que las masas de los cuerpos son proporcionales á su peso ; por consiguiente se podrá substituir quando se quisiere , el peso en lugar de la masa.

De los Movimientos uniformemente acelerados.

34 Un cuerpo que ha recibido solo un impulso , persevera en su movimiento con la misma velocidad, y la misma direccion del primer instante (16). Pero si se le dá otro impulso ácia la misma direccion, ó ácia otra opuesta á la primera, se mueve entonces con una velocidad igual á la suma, ó á la diferencia de las dos velocidades que se le comunicaron succesivamente: en esto no hay duda.

Por consiguiente, si concebimos que en intervalos de tiempos determinados reciba el cuerpo nuevos impulsos ácia la misma direccion , ó ácia otra opuesta á la primera, se moverá con un movimiento *variado* ó desigual ; su velocidad será diferente al principio de cada intervalo de tiempo.

Como quiera , su velocidad al cabo de un tiempo qualquiera debe apreciarse por el espacio que entonces podria andar en la unidad de tiempo , si viniese á ser uniforme su movimiento , contando desde el instante en que se considera dicha velocidad.

Llámase en general *Fuerza aceleratriz* qualquiera fuerza que impele un mobil para hacer crecer su movimiento. Quando en intervalos de tiempos iguales obra esta fuerza igualmente, se llama *Fuerza aceleratriz constante.* Si la fuerza

za obrára de modo que retardáse el movimiento del cuerpo, se llamaria *Fuerza retardatriz.* Averiguemos las circunstancias del movimiento uniformemente *acelerado.*

35 Ya que en este movimiento obra siempre de un mismo modo la fuerza aceleratriz, si suponemos que sea g la velocidad que comunica en cada unidad de tiempo, es evidente que las velocidades succesivas del mobil serán g, $2g$, $3g$ &c. de suerte que al cabo de un número t de unidades, la velocidad adquirida será g tomada tantas veces quantas unidades hubiere en t; quiero decir, que será $g \times t$, ó gt.

36 Luego 1.° en el movimiento uniformemente acelerado los números de grados de velocidad que adquiere el mobil, crecen como los números de intervalos que dura el movimiento; ó *las velocidades adquiridas son como los tiempos corridos desde el principio del movimiento.* Y así, si llamamos u la velocidad que ha adquirido el mobil al cabo del tiempo t, tendremos $u = gt$.

2.° Las velocidades con que se halla succesivamente el mobil durante cada uno de los intervalos consecutivos, forman, pues, una progresion arismética $\div g \,.\, 2g \,.\, 3g \,.\, 4g \,.$ &c. cuyo último término es gt ó u, y cuyo número de términos es t; quiero decir, que es igual al número de los impulsos de la fuerza aceleratriz.

3.° Y como estas velocidades g, $2g$, $3g$ &c. son cada una el espacio que puede andar el mobil en cada intervalo correspondiente (18), el espacio total anda-

do en el tiempo t; será por lo mismo la suma de los términos de esta progresion arismética; esto es (II. 169) será $(g + u) \times \frac{t}{2}$. Luego llamando e dicho espacio total andado desde el principio del movimiento, tendremos $e = (g + u) \frac{t}{2}$.

37 Imaginemos ahora que obra sin interrupcion la fuerza aceleratriz, ó lo que es lo mismo, imaginemos el tiempo t dividido en una infinidad de partes infinitamente pequeñas que llamaremos instantes; y que al principio ó al fin de cada instante la fuerza aceleratriz dá un impulso al mobil. Imaginemos tambien que obra por instantes infinitamente pequeños. Entonces siendo g infinitamente pequeña respecto de u, se debe en la equacion $e = (g + u) \frac{t}{2}$ omitir g, y sale $e = \frac{ut}{2}$.

38 Sentado esto, imaginemos que al cabo del tiempo t dege de obrar la fuerza aceleratriz; el cuerpo perseverará (16) en su movimiento con la velocidad u que hubiere adquirido; quiero decir, que en cada unidad de tiempo andará un espacio $= u$ (18); luego si prosiguiese moviéndose con la misma velocidad durante el tiempo t, andaría un espacio $= ut$, esto es, duplo del espacio e ó $\frac{ut}{2}$ que ha andado (37) en un tiempo igual, en virtud de los impulsos succesivos de la fuerza aceleratriz. Luego *en el movimiento acelerado uniforme y continuamente, el espacio andado en un tiempo señalado es la mitad del espacio que puede andar el mobil en el mismo tiempo con la velocidad adquirida, continuada uniformemente.*

Ya

39 Ya que crecen las velocidades adquiridas (36) como los tiempos corridos, si llamamos p la velocidad adquirida al cabo de un segundo, la velocidad adquirida al cabo de un número t de segundos, será pt; así tendremos $u = pt$. La equacion $e = \frac{ut}{2}$ hallada arriba se transformará, pues, en $e = \frac{ptt}{2}$. Luego si representa E otro espacio andado del mismo modo en otro tiempo T, tendremos tambien $E = \frac{pT^2}{2}$; de donde inferiremos $e : E :: \frac{ptt}{2} : \frac{pTT}{2} :: tt : TT$; cuya proporcion está diciendo que *los espacios andados con un movimiento acelerado uniforme y continuamente son como los quadrados de los tiempos.*

40 Y como las velocidades son como los tiempos (36), *son tambien los espacios como los quadrados de las velocidades.*

41 Luego *las velocidades y los tiempos son como las raices quadradas de los espacios andados desde el principio del movimiento.*

42 En la equacion $e = \frac{ptt}{2}$ que hallamos antes (39), la cantidad p que, segun hemos supuesto, representa la velocidad que la fuerza aceleratriz es capaz de producir en virtud de su impulso succesivo en un segundo, es lo que llamamos la fuerza aceleratriz; porque hemos de apreciar esta fuerza por el efecto que es capaz de producir en el mobil en un tiempo determinado, cuyo efecto no es otro que imprimirle cierta volocidad.

Del Movimiento libre de los cuerpos pesados.

43 A la especie de movimiento que acabamos de considerar debe referirse el movimiento de los cuerpos pesados; pero antes de averiguar sus leyes, conviene dar noticia de algunos hechos pertenecientes á la pesantez.

Por *Pesantez* entendemos la fuerza que impele los cuerpos ácia abajo por lineas verticales ó perpendiculares á la superficie de las aguas. Si fuese la tierra ó la superficie de las aguas perfectamente esférica, las direcciones de la pesantez concurririan todas en el centro. Pero aunque no sea esta superficie perfectamente esférica, la falta muy poco para serlo; de suerte que respecto de los puntos que hemos de considerar, podemos suponer, sin error substancial, que las direcciones de la pesantez concurren todas en el centro de la tierra.

Ya se nos ofreció ocasion de decir (I.786) que el radio de la tierra considerada como esférica es de $7614466\frac{1}{3}$ varas, y que una distancia de 37 varas en la superficie de la tierra corresponde á un ángulo de un segundo en el centro de la tierra. Así, en una máquina que tuviese 37 varas de largo no faltaria sino un ángulo de un segundo para que en sus dos estremos fuesen paralelas las direcciones de la pesantez. Por consiguiente en un mismo sitio se pueden considerar como paralelas las direcciones de la pesantez.

Por lo que toca á la cantidad de esta fuerza, hablando con rigor, es distinta en las varias regiones, segun están

mas

mas ó menos distantes de los polos de la tierra, y crece ó mengua segun están los cuerpos mas próximos ó mas apartados del centro de la tierra; pero la diferencia que se repara en ambos casos es tan corta, que no merece por ahora llamar nuestra atencion. Por lo que, miraremos aquí la pesantez como una fuerza que en todas partes es la misma; esto es, una fuerza que en tiempos iguales impele los cuerpos ácia abajo con un mismo impulso.

Hemos de considerar esta fuerza como que obra igualmente cada instante en cada parte de la materia. Pero es constante que si cada una de las partes de un cuerpo recibe la misma velocidad, el total no se moverá sino con la misma velocidad que recibiría sola una de las partes separada de la masa; de suerte que la velocidad que comunica la pesantez á una masa qualquiera no pende de la cantidad de dicha masa: es la misma en una masa grande que en otra pequeña. Verdad es que no todos los cuerpos caen de una misma altura en un mismo tiempo; pero la diferencia es efecto de la resistencia del ayre, y así se observa que si se dejan caer en un espacio sin ayre cuerpos de masas diferentes, gastan no obstante el mismo tiempo para caer de alturas iguales.

Aquí conviene distinguir entre el efecto de la pesantez, y el efecto del peso. El efecto de la pesantez consiste en comunicar ó intentar comunicar á cada parte de la materia cierta velocidad que es de todo punto independiente del número de las partes materiales. Pero el peso es

igual á la fuerza que hemos de hacer para impedir que una masa propuesta obedezca á su pesantez. Esta fuerza pende de dos cosas; es á saber, de la velocidad que la pesantez intenta comunicar á cada parte, y del número de las partes que mueve ó intenta mover. Pero como la velocidad que la pesantez intenta comunicar es la misma respecto de cada parte de la materia, la fuerza que hemos de hacer es proporcional al número de las partes de la materia; quiero decir, á la masa. Por consiguiente *el peso pende de la masa, pero no la pesantez.* Esto prueba lo que digimos antes (33), que la masa es proporcional al peso.

44 Quando se considera el peso de un cuerpo sin atender al volumen que le contiene, se llama *Peso absoluto*, ó mas comunmente, *Pesantez* ó *Gravedad específica* de dicho cuerpo.

45 Pero muchas veces se ofrece saber quanto pesa alguna materia en un volumen *dado*. Este peso se llama *Gravedad* específica de dicha materia. Esto manifiesta que en general la gravedad específica de un cuerpo es la razon que hay entre el número de las medidas del peso absoluto de dicho cuerpo, y el número de las medidas de su volumen; ó lo que viene á ser lo mismo, *el peso comprehendido en la unidad de volumen.*

46 De aquí se sigue, que si los pesos absolutos de dos cuerpos fuesen P y P', sus gravedades específicas p y p', sus volúmenes S y s, tendremos $p : p' :: \frac{P}{S} : \frac{P'}{s}$, de donde sacaremos $P : P' :: Sp : sp'$; esto es, que *las gravedades*

ab-

absolutas están unas con otras en razon compuesta de los volúmenes, y de las gravedades específicas.

47 *Quando las gravedades absolutas son iguales, las gravedades específicas están en razon inversa de los volúmenes; porque entonces* $Sp = sp'$, *y por consiguiente* $p : p' :: s : S$.

48 Quando decimos que la gravedad específica es igual al cociente de la gravedad absoluta dividida por el volumen, ó que la pesantez absoluta es igual al producto del volumen por la gravedad específica, estas espresiones se han de entender en el sentido que hemos declarado (46). Con esto queda aclarada de antemano una espresion de que haremos muchísimo uso en adelante. Quando se nos ofreciere representar el peso absoluto de un cuerpo cuyo volumen fuere conocido ó determinable, en virtud de las condiciones de alguna cuestion, reduciremos dicho volumen á medidas conocidas, pongo por caso, á pies cúbicos, y multiplicaremos el número de pies cúbicos de que constare, por el peso absoluto de un pie cúbico de la misma materia (cuyo peso consideraremos como su gravedad específica), con esto sacaremos evidentemente el peso absoluto del cuerpo propuesto: entonces diremos que dicho peso es igual al producto de su pesantez específica por su volumen. Una vez escogido de este modo el volumen que haya de servir para medir la gravedad específica, se habrá de usar la misma unidad en todas las comparaciones que se hicieren entre los pesos absolutos de diferentes cuerpos, respecto de un mismo asunto.

Ya

49 Ya que las masas son (43) proporcionales á sus pesos, no hay duda en que las densidades son proporcionales á las gravedades específicas; porque las densidades son masas comprehendidas en volúmenes iguales, y las gravedades específicas tambien son pesos comprehendidos en volúmenes iguales.

50 Todo esto sentado, veamos quales son las leyes del movimiento de los cuerpos pesados.

Ya que la pesantez obrá igualmente y sin interrupcion á qualquiera distancia que esté el cuerpo del centro de la tierra (á lo menos respecto de las distancias á que nosotros podemos subir ó bajar), será la pesantez una fuerza aceleratriz constante, la qual á cada instante comunica al mobil un nuevo grado de velocidad que es siempre uno mismo en cada instante igual: de suerte que (36 y sig.) las velocidades adquiridas crecen como los tiempos corridos; los espacios andados se han cómo los quadrados de los tiempos, ó como los quadrados de las velocidades; las velocidades se han como las raíces quadradas de los espacios andados; los tiempos se han tambien como las raíces quadradas de los espacios andados; en suma, quanto hemos dicho de las fuerzas aceleratrices constantes, se aplica al pie de la letra á la pesantez. Suponiendo siempre que en todo esto prescindimos de la resistencia del ayre, y de otro obstáculo qualquiera.

Basta, pues, para poder determinar los tiempos, los espacios, y las velocidades en el movimiento de los cuerpos gra-

graves, conocer un solo efecto de la pesantez en un tiempo determinado. Porque haciendo uso de las equaciones $u = pt$, $e = \frac{ptt}{2}$, podremos determinar todos estos puntos con tal que conozcamos el valor de p.

Representa p, segun llevamos dicho (39), la velocidad que adquiere el mobil al cabo de un segundo de tiempo. Consta por esperiencia (y mas adelante diremos como se ha averiguado) que un cuerpo al qual no hace el ayre una resistencia sensible, cae de $15\frac{1}{10}$, ó con mas precision, de $15^{p},098$ en el primer segundo de su caída.

Por otra parte hemos visto (38) que con la velocidad adquirida en una série de aceleraciones podria andar el movil moviendose uniformemente un espacio duplo en el mismo tiempo. Luego la velocidad que un cuerpo pesado ha adquirido al cabo del primer segundo de su caída es tal, que si la pesantez dejara de obrar en él, andaría el duplo de $15\frac{1}{10}$ pies, esto es, $30^{p},2$ cada segundo. Luego $p = 30,2$.

51 Ahora bien, la equacion $u = pt$, y la equacion $e = \frac{ptt}{2}$ nos están diciendo; la primera, que para hallar la velocidad que un cuerpo pesado ha adquirido despues de haber caído durante un número t de segundos, se ha de multiplicar la que adquiere en el primer segundo, por dicho número t de segundos.

Luego *quando un cuerpo pesado ha caido durante cierto número de segundos, la velocidad que há adquirido es tal, que si dejára de obrar la pesantez, andaría por segundo tantas*

tas veces 30^p,2 *quantos segundos hubieren corrido.* Así, un cuerpo que ha gastado 7 segundos en caer, se mueve al cabo de los 7 segundos con una velocidad tal que con ella andaría 7 veces 30^p,2 ó 211 $\frac{2}{5}$ pies por segundo, sin ninguna nueva alteracion.

52 La segunda equacion $e = \frac{ptt}{2} = \frac{1}{2}ptt$ está diciendo que para hallar el espacio e, ó la altura e de la qual cae en un cuerpo pesado en un número t de segundos, se ha de multiplicar $\frac{1}{2}p$, esto es la cantidad de que cae en el primer segundo, por el quadrado del número de segundos.

Luego *la altura de que cae un cuerpo pesado en un número* t *de segundos, es tantas veces* 15 $\frac{1}{10}$ *pies, quantas unidades hay en el quadrado de dicho número de segundos.* Así, quando un cuerpo ha gastado 7 segundos en caer, se puede asegurar que ha caído de 49 veces 15, 1, esto es de 740 pies con muy poca diferencia, siempre en el supuesto de que no haga el ayre resistencia alguna. Se echa, pues, de ver que como sea dado el tiempo corrido, es sumamente facil determinar la velocidad adquirida, y el espacio andado.

53 Si deseáramos averiguar que tiempo gastaría un cuerpo para caer de una altura conocida; la equacion $e = \frac{1}{2}ptt$ dá $tt = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, y por consiguiente $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$, quiero decir que se debe buscar quantas veces la altura e contiene la altura $\frac{1}{2}p$ de la que cae un cuerpo pesado en el pri-

primer segundo, y sacar la raiz quadrada de dicho número de veces.

54 Propongámonos indagar de que altura debería caer un cuerpo pesado para adquirir una velocidad conocida; esto es una velocidad con la qual pudiese andar uniformemente cierto número de pies por segundo. De la equacion $u = pt$, sacaremos el valor de t que es $t = \frac{u}{p}$; substitúyole en la equacion $e = \frac{1}{2}ptt$, y sale $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$, cuyo valor nos está diciendo que para hallar la altura e de la qual debería caer un cuerpo pesado para adquirir una velocidad u de cierto número de pies por segundo, se debe partir el quadrado de dicho número de pies por el duplo de la velocidad que adquiere un cuerpo pesado al cabo del primer segundo; esto es por 60,4.

Así, si quiero saber de que altura debería caer un cuerpo pesado para adquirir una velocidad de 100 pies por segundo, parto el quadrado de 100, que es 10000, por 60,4; el cociente $165\frac{1}{2}$ me dice que un cuerpo debe caer de $165\frac{1}{2}$ pies para adquirir una velocidad de 100 pies por segundo.

Claro está que el mismo rumbo se debería seguir para determinar á que altura subiría un cuerpo arrojado perpendicularmente con una velocidad conocida.

55 Como es fácil, según lo manifiestan estos egemplos, determinar todas las circunstancias de los movimientos de los cuerpos pesados, á estos movimientos suelen referirse comunmente todos los demás movimientos; por ma-

ne-

nera que en vez de dár inmediatamente la velocidad de un cuerpo, se suele dar la altura de la qual debiera haber caído para adquirir dicha velocidad, por el impulso de la pesantez.

Observemos, pues, para resumir, que todas las circunstancias del movimiento acelerado, y por consiguiente del movimiento de los cuerpos graves, están cifradas en las dos equaciones $u = pt$, $e = \frac{1}{2}ptt$; de suerte que siendo p conocida, en conociendo una de estas tres cosas, el tiempo, el espacio, y la velocidad, se pueden siempre hallar las otras dos, sea inmediatamente por medio de la una ó de la otra de estas dos equaciones, sea valiendose de las dos combinadas, como se ha visto (54).

Del Movimiento variado de qualquiera modo.

56. Quando el mobil obedece al impulso de una fuerza que obra en él sin interrupcion, pero de distinto modo á cada instante, el movimiento se llama en general *Movimiento variado*. El modo con que un *resorte*, *elastro* ó muelle doblado se restituye á su primer estado en cesando la accion del agente que le tenia torcido, es un egemplo del movimiento variado; aunque vaya creciendo la velocidad, sin embargo van en diminucion los grados de su aumento. Lo mismo se puede decir de los grados por donde llega á la uniformidad el movimiento de un navio; la accion del viento en las velas mengua al paso que el navio adquiere movimiento, porque con quanta mayor velocidad ca-

camine, tanto menos sugeto está á dicha accion.

57 Los principios que nos pueden dirigir para determinar las circunstancias de estos movimientos, se infieren á poca costa de lo que hemos sentado acerca de los movimientos uniformes, y de los movimientos uniformemente acelerados, conforme lo vamos á declarar. 1.° De qualquiera modo que el movimiento varíe, si le consideramos respecto de instantes infinitamente pequeños, podemos suponer que es una misma la velocidad mientras dura dicho instante. Y como la espresion de la velocidad uniforme es el espacio andado en un tiempo qualquiera t, dividido por el tiempo mismo t; quando no fuere uniforme mas que un instante, su espresion será el espacio infinitamente pequeño andado en dicho instante, dividido por el instante mismo. Luego si representa e el espacio andado con un movimiento variable en un tiempo qualquiera t, representará de la parte andada del espacio e en el instante dt; tendremos, pues, $u = \frac{de}{dt}$, ó $de = udt$; esta es la primera equacion fundamental de los movimientos variados.

58 2.° De la equacion $u = pt$ (39) que espresa la relacion entre las velocidades y los tiempos en los movimientos uniformemente acelerados, se saca $p = \frac{u}{t}$; esto es, que quando la fuerza aceleratriz, ó por mejor decir la cantidad p que es su medida (42) es constante, su espresion es la velocidad u que engendra en un tiempo t, dividida por el tiempo mismo t. Luego si dicha fuerza aceleratriz p obra de diferente modo á cada instante, esto es

quan-

quando no es constante sino un instante, su espresion ha de ser la velocidad que engendrare en dicho instante, dividida por el mismo instante; quiero decir que su espresion ha de ser el incremento de la velocidad, dividido por el incremento del tiempo; será, pues, $p = \frac{du}{dt}$, ó $du = pdt$; esta es la segunda equacion fundamental de los movimientos variados.

59 En la equacion $u = pt$ representa (39) p la velocidad que la fuerza aceleratriz engendraría en el mobil en un tiempo determinado, en un segundo por egemplo, en virtud de una accion continuada, y siempre la misma. Lo mismo representa en la equacion $du = pdt$. Pero hemos de prevenir que en el supuesto de ser variable la fuerza aceleratriz, la cantidad p que representa la velocidad que sería capaz de engendrar, si obrase como fuerza aceleratriz constante en un segundo, es distinta en cada instante del movimiento. Con efecto, bien se echa de ver que quando la fuerza aceleratriz llega á ser menor, la velocidad que podría engendrar en un segundo, en virtud de su accion actual igualmente reiterada en cada instante de dicho segundo, ha de ser menor, y recíprocamente.

60 De las dos equaciones $de = udt$, $du = pdt$ se puede sacar otra que es tambien de muchísima utilidad.

Porque de la equacion $de = udt$ sacarémos $dt = \frac{de}{u}$, y, substituyendo este valor en la equacion $du = pdt$, resulta, despues de egecutadas las reducciones correspondientes, $pde = udu$.

Quan-

61 Quando sacamos la equacion $du = pdt$ (58) supusímos que la velocidad iba creciendo. Si fuese menguando, deberíamos escribir (III. 336) $-du$ en lugar de du; por manera que las dos equaciones $du = pdt$, y $pde = udu$, se han de escribir de este modo $\pm du = pdt$, y $pde = \pm udu$, sirviendo el signo superior para el movimiento acelerado, y el inferior para el movimiento retardado.

62 Tambien se puede sacar de las dos equaciones fundamentales, otra que no hemos de omitir.

La equacion $de = udt$ dá $u = \frac{de}{dt}$; luego $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$. Substituyendo este valor en la equacion $pdt = \pm du$, sale $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Y si suponemos, como es lícito, que dt sea constante, tendremos $pdt = \pm \frac{dde}{dt}$, ó $pdt^2 = \pm dde$.

Pero importa mucho tener presente que la equacion $pdt^2 = \pm dde$ supone dt constante. Quando se supone variable dt, se hace uso de la equacion $pdt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Se nos ofrecerán varias ocasiones de acudir á estas fórmulas. Pero es importante no olvidarse de que la cantidad p que llevan, representa respecto de cada instante la velocidad que la fuerza aceleratriz sería capaz de engendrar en el mobil en un intervalo determinado de tiempo, como de un segundo, si durante este segundo obrara como fuerza aceleratriz constante; por manera que como la cantidad p mide respecto de cada instante el efecto que la fuerza aceleratriz puede causar, la llamaremos, para abreviar, fuerza aceleratriz.

Fig.

Del Equilibrio entre fuerzas directamente opuestas.

63 Hemos considerado hasta aquí el movimiento con que se ha de mover ùn cuerpo sugeto á la accion de una fuerza que obra en él, siempre ácia una misma direccion. Ahora nos toca indagar de qué manera el movimiento pasa al mobil. Este es un punto de bastante importancia; pero como las leyes de la comunicacion del movimiento penden de las del equilibrio, hemos de indagar primero estas últimas; por ahora no trataremos mas que del equilibrio entre fuerzas directamente opuestas.

Representaremos las fuerzas, como hasta aquí, por los efectos que pueden producir; quiero decir, que representaremos cada fuerza por la cantidad de movimiento de una masa determinada. Pero por no abrazar tantos objetos á un tiempo, consideraremos cada masa como reducida á un punto, al qual atribuiremos con el pensamiento la misma cantidad de movimiento que al cuerpo en cuyo lugar le substituyamos. Veremos mas adelante que hay con efecto en cada cuerpo un punto por el qual el movimiento se comunica, como si en él estuviera reconcentrada toda la masa. A mas de esto, mientras no prevengamos lo contrario, consideraremos los cuerpos como compuestos de partes perfectamente duras y enlazadas unas con otras, de manera que no pueda variar su situacion respectiva por la accion de ninguna fuerza.

1. 64 Sentado esto, concibamos dos masas M y m, que la

la primera se mueva de *A* ácia *C* con una velocidad *V*; la segunda de *C* ácia *A* con la velocidad *v*; quando estas dos masas se encontraren, se *pondrán en equilibrio*, ó *harán equilibrio* si la cantidad de movimiento de *M* fuese igual á la cantidad de movimiento de *m*; esto es, si $MV = mv$ (24). Fig.

Porque es evidente que si $M = m$, y si son tambien iguales las dos velocidades *V* y *v*, habrá equilibrio; pues siendo todo igual por ambos lados, no habrá razon ninguna para que prevalezca *M* ó *m*.

65 Supongamos ahora que sea *M* dupla de *m*, pero que al mismo tiempo sea *v* dupla de *V*; que, por egemplo, *M* ande un pie por segundo, y *m* dos pies por segundo. Es evidente que puedo considerar *M* como compuesta de dos masas iguales á *m*; y que en el instante del choque puedo figurarme el cuerpo *m* como animado de una velocidad de un pie por segundo, á la qual se le añade en el mismo instante otra velocidad de un pie por segundo. Puedo en este caso figurarme que en el choque la masa *m* gasta una de sus velocidades contra una porcion igual de la masa *M*; y la otra velocidad que la queda con la porcion igual y restante de la masa *M*.

Si en lugar de suponer las dos masas *M*, *m* en razon de 2 : 1, y las velocidades en razon de 1 : 2, esto es en razon inversa ó recíproca de las masas, las supusiéramos en otra razon qualquiera, se echa de ver que siempre podríamos suponer la masa mayor compuesta de cierto número de masas

Fig. sas iguales á la menor, de las quales cada una destruye en la menor una velocidad igual á la suya; por manera que podemos sentar como general el principio siguiente que es fundamental.

Dos cuerpos que obran uno en otro, ácia direcciones directamente opuestas, forman equilibrio quando las cantidades de sus movimientos son iguales; esto es, quando el producto de la masa del uno por la velocidad con que intenta moverse, es igual al producto de la masa del otro por la velocidad con que tambien procura moverse.

Esta proposicion es cierta ora se entienda de dos cuerpos que caminan libremente el uno al encuentro del otro, ó de dos cuerpos que se impelen por medio de una linea *Mm* inflexible y sin masa; ora se entienda de dos cuerpos que se tiran ácia direcciones contrarias, por medio de un hilo *Mm inestensible* ó que no puede dár de sí. Y recíprocamente si dos cuerpos forman equilibrio, hemos de inferir que sus movimientos son directamente opuestos, y que tienen cantidades iguales de movimiento.

66 Luego si tres ó mas cuerpos M, m, m' que se
2. mueven ó intentan moverse en una misma linea con velocidades V, v, v', hacen equilibrio, es preciso que la suma de las cantidades de movimiento de los que obran ácia una direccion sea igual á la suma de las cantidades de movimiento de los que obran ácia una direccion contraria.

Porque si forman equilibrio, siempre podemos suponer que caminando M y m ácia una misma direccion, m des-

destruye la una parte del movimiento de m', y M destruye Fig.
la otra. Si llamamos x la velocidad que la accion de m le quita á m', será $m'x$ la cantidad de movimiento que dicha accion le quita; será, pues, $mv = m'x$; no tendrá, pues, el cuerpo M que destruir en m' mas que la cantidad restante de movimiento; es á saber, $m'v' - m'x$; luego será $MV = m'v' - m'x$; ó por ser $m'x = mv$, será $MV = m'v' - mv$, y $MV + mv = m'v'$.

Del Movimiento compuesto.

67 Supondremos tambien aquí que las masas en que obraren las fuerzas de que vamos á hablar, están reconcentradas en un punto.

Llámase *Movimiento compuesto*, el que recibe un cuerpo solicitado á un mismo tiempo de muchas fuerzas, cuyas direcciones sean las que se quisieren.

Si un cuerpo M que se mueve en la direccion de la linea recta AB, recibe, quando llega al punto M, un impulso en la direccion de otra linea MD perpendicular á la linea AB, este nuevo impulso no puede producir otro efecto sino el de apartarle de la linea AB; no puede ni aumentar, ni disminuir la velocidad que tenia para apartarse de CD perpendicularmente á esta linea. Porque siendo la direccion CD perpendicular á AB, no hay razon ninguna para que la fuerza que obra ácia CD produzca algun efecto antes á la derecha que á la izquierda de dicha linea; y como no le puede producir ácia ambos lados á un tiempo, 3.

Fig. no le producirá, ni ácia el uno, ni ácia el otro.

Del mismo modo discurriríamos, si supusiéramos que moviéndose el cuerpo *M* ácia *CD*, se le impele ácia *MB*; este último impulso no añadirá, ni quitará nada á la velocidad con que el cuerpo *M* intentaba apartarse de *MB*.

68 Principio fundamental. *Si dos fuerzas* P *y* Q, *cu-*
4. *yas direcciones forman un ángulo recto, obran en un mismo instante en el mobil* M; *siendo la fuerza* Q *tal, que por su impulso instantaneo en el mobil pueda hacer por sí sola que ande* MB *en un tiempo determinado como de un segundo; y siendo la fuerza* P *tal, que pueda hacer por sí sola que el mobil ande* MD *en el mismo tiempo; digo que por la accion compuesta de estas dos fuerzas, el mobil* M *andará en el mismo tiempo la diagonal* ME *del paralelogramo* DMBE, *cuyos lados son las mismas lineas* MB, MD.

Ya que las dos fuerzas obran en el mismo instante en el mobil, se puede suponer que estaba en movimiento en la linea *PD*, y que así que llega al punto *M*, obra en el mobil la fuerza *Q* perpendicular á *PD*; pero esta fuerza no puede (67) aumentar ni disminuir la velocidad con que se apartaba de *QB*; luego si por el punto *D* se tira *DE* paralela á *MB*, será preciso que al cabo de un segundo se halle el mobil en algun punto de la linea *DE* cuyos puntos distan todos de *QB* una cantidad igual á *MD*.

Lo que hemos dicho de la fuerza *P* respecto de la fuerza *Q*, se aplica de todo punto á la fuerza *Q* respecto de la fuerza *P*; luego si por el punto *B* se tira *BE* paralela á *PD*, de-

deberá el cuerpo al cabo de un segundo hallarse en algun punto de *BE*. Y como no hay otro punto sino *E* que esté á un tiempo en ambas lineas *DE* y *BE*, el mobil estará en *E* al cabo de un segundo. Fig.

Es constante por otra parte (16) que qualquiera camino que siga el mobil en virtud del impulso instantaneo de ambas fuerzas, debe ser una linea recta; porque luego que han obrado, se halla el mobil libre, y entregado á sí mismo; por consiguiente ya que este camino debe pasar por *M* y *E*, debe ser *ME*, esto es la diagonal del paralelogramo *DMBE*.

El mobil anda *ME* con un movimiento uniforme, porque inmediatamente despues de la accion compuesta de ambas fuerzas, se halla entregado á sí mismo (16).

69 Ya que todo el efecto que las dos fuerzas *P* y *Q* obrando juntas producen en el mobil, es hacer que ande la diagonal *ME*; podemos inferir 1.° que en lugar de dos fuerzas cuyas direcciones forman un ángulo recto, se puede en qualquiera ocasion substituir sola una, con tal que con el impulso de esta pueda andar el mobil la diagonal de un paralelogramo rectángulo, cuyos lados andaría en el mismo tiempo cada uno separadamente con el impulso de la fuerza cuya direccion representa.

La fuerza única *ME* que resulta de la accion de las dos fuerzas *MB*, *MD* se llama la *Resultante* ó *Derivada* de dichas dos fuerzas.

Como las lineas *MB*, *MD* representan los efectos que

Fig. pueden causar las fuerzas *Q* y *P* obrando separadamente, y *ME* representa la fuerza que pueden causar quando obran juntas, podemos suponer que *MB*, *MD*, *ME* representan las fuerzas mismas.

2.° Tambien podremos considerar una fuerza única qualquiera *ME*, como el resultado de otras dos fuerzas *MB*, *MD*, cuyas direcciones formarian una con otra un ángulo recto, con tal que siendo aquella representada por la diagonal *ME*, estas dos lo sean por los lados *MB*, *MD* de un mismo paralelogramo rectángulo. Se podrán, pues, substituir en lugar de la fuerza única *ME* las otras dos *MB* y *MD*; pues en la realidad estas dos fuerzas no producirian sino *ME*.

70 En general, *qualquiera ángulo que formen una*
5. *con otra las direcciones de las dos fuerzas* P *y* Q, *que obran*
6. *á un mismo tiempo en un mobil* M; *este mobil andará la diagonal* ME *del paralelogramo* DMBE, *cuyos lados señalan en las direcciones de dichas fuerzas los efectos de que son capaces obrando separadamente; y andará dicha diagonal en el mismo tiempo que gastaría para andar el lado que representa qualquiera de las dos fuerzas en virtud del impulso de la misma fuerza.*

Concibamos que por el punto *M* se tire la *FMH* perpendicular á la diagonal *ME*; y que por los puntos *D* y *B* se tiren las lineas *DF*, *BH* paralelas, y las lineas *DG*, *BI* perpendiculares á la misma diagonal. En lugar de la fuerza *P* representada por *MD*, que es la diagonal del para-

ralelogramo rectángulo *FMGD*, se pueden tomar (69) Fig.
las dos fuerzas *MF* y *MG*. Por la misma razon en lugar de la fuerza *Q* representada por la diagonal *MB* del paralelogramo rectángulo *MHBI*, se pueden tomar las dos fuerzas *MH* y *MI*. Podemos, pues, en lugar de las dos fuerzas *P* y *Q* substituir las quatro fuerzas *MF*, *MG*, *MH*, *MI*; y estas no pueden menos de tener la misma derivada que aquellas dos. Pero de estas quatro fuerzas, las dos *MH*, *MF* no influyen de ningun modo en la derivada, porque obran en direcciones opuestas, y son iguales. Porque es facil de probar que los dos triángulos *DGM*, *EIB* son iguales por la naturaleza del paralelogramo; luego *DG* = *BI*; luego tambien *MF* = *MH*.

Por lo que mira á las dos fuerzas *MI*, *MG*, como 5.
siguen una misma direccion, el efecto que de ellas resulta debe ser la suma de los dos efectos *MG*, *MI*, porque 6.
estas fuerzas obran ácia una misma direccion, y debe ser su diferencia porque obran ácia direcciones opuestas. Pero ya que el triángulo *EIB* es igual al triángulo *DGM*; sale *MI* + *MG* = *MI* + *EI* = *ME*; y *MI* — *MG* 5.
= *MI* — *EI* = *ME*; luego las quatro fuerzas *MF*, *MH*, 6.
MG, *MI*, y por consiguiente las dos fuerzas *MD*, *MB* no causan mas efecto que la fuerza *ME* representada por la diagonal del paralelogramo *DMBE* cuyos dos lados *MB*, *MD* representan las dos fuerzas *Q* y *P*.

71 La resolucion declarada de las fuerzas nos enseña á distinguir la fuerza absoluta de la fuerza relati-

Fig. tiva de una potencia. La *Fuerza absoluta* es toda la que tiene en sí, y la *Fuerza relativa* es aquella parte de su fuerza absoluta con que obra en el mobil.

5. Así la fuerza de la potencia *P* se resuelve en dos representadas por las lineas *MF*, *MG*; y como la fuerza espresada por *MF* en nada contribuye para impeler el mobil ácia *E*, y solo produce este efecto la fuerza espresada por *MG*, esta linea representa la fuerza relativa de la potencia *P*. Lo mismo se puede aplicar á la potencia *Q*.

De lo que se infiere que las potencias no producen efecto sino por sus fuerzas relativas, y en las direcciones de estas mismas fuerzas.

4. 72 En lo que acabamos de decir, hemos represen-
5. tado las dos fuerzas *P* y *Q* por las lineas *MD*, *MB* que
6. en virtud de su impulso andaria en un mismo tiempo el mobil *M*; esto es, por las velocidades que le pueden comunicar; habiendo dicho (24) que la verdadera medida de las fuerzas debe ser la cantidad de movimiento, que son capaces de producir. Pero como las cantidades de movimiento son en razon de las velocidades (25); quando es una misma la masa, como en el caso presente; podemos representar las fuerzas conforme lo hemos practicado por las velocidades *MD*, *MB*.

Pero si en vez de conocer las velocidades que las dos fuerzas *P* y *Q* pueden comunicar al mobil *M*, conociéramos las cantidades de movimiento que pueden producir en ma-

masas conocidas; en este caso tomaríamos *MD* y *MB* Fig.
proporcionales á dichas cantidades de movimiento. Si solo supiéramos, por egemplo, que las fuerzas *P* y *Q* son tales que la fuerza *P* puede dar una velocidad conocida v á una masa conocida m; y que la fuerza *Q* puede producir una velocidad conocida v' en una masa conocida m', haríamos $MD : MB :: mv : m'v'$. Porque en virtud de lo que hemos dicho poco ha, hemos de tomar $MD : MB$ en la razon de las velocidades que las dos fuerzas pueden comunicar al mobil *M*; y como la primera puede engendrar la cantidad de movimiento mv, podrá comunicarle al mobil *M* la velocidad $\frac{mv}{M}$ (24); y por la misma razon la fuerza *Q* puede comunicarle al mobil *M* la velocidad $\frac{m'v'}{M}$. Luego habríamos de tomar $MD : MB :: \frac{mv}{M} : \frac{m'v'}{M}$; y por ser $\frac{mv}{M} : \frac{m'v'}{M} :: mv : m'v'$; sería menester tomar con efecto *MD* y *MB* proporcionales á las cantidades de movimiento que son los efectos de las fuerzas *P* y *Q*.

Es provechosa esta consideracion para comparar los efectos de diferentes fuerzas que obran en distintos móbiles.

La proposicion general que acabamos de sentar (70), es de muchísima utilidad; casi todo lo que diremos de aquí en adelante no será mas que aplicaciones que de ella se harán.

73 Se echa, pues, de ver que considerar un cuerpo como solicitado del impulso junto de las fuerzas *MB*, *MD*, que forman el ángulo que se quisiere, viene á ser lo mismo

que

Fig. que suponerle impelido de la accion única de la fuerza representada por la diagonal *ME*.
5.
6. Y recíprocamente, lo mismo viene á ser considerar un cuerpo solicitado de una fuerza única *ME*, que considerarle solicitado á un tiempo de dos fuerzas que formen los lados de un paralelogramo cuya diagonal fuese la fuerza única. Pongamos por caso que un cuerpo llegue desde *M* á *E* con un movimiento uniforme en un segundo de tiempo; ó que se mueva en la linea *MB* de modo que la ande en un segundo; y que al mismo tiempo dicha linea se mueva paralela á sí misma á lo largo de *MD*, y que tambien la ande en un segundo, el camino que el cuerpo anduviese en este supuesto no será otro que la linea *ME*.

74 Como las dos fuerzas *MB*, *MD* se encuentran en el punto *M*, están por precision en un mismo plano (I. 535). Y como su derivada es la diagonal *ME* que está en el plano del paralelogramo, se puede asegurar generalmente, que *dos fuerzas que se encuentran, están siempre en un mismo plano con su derivada.*

De la Composicion y Resolucion de las fuerzas.

75 No solo sirve el principio que acabamos de sentar, para reducir dos fuerzas que concurren en algun punto á una sola, y una fuerza á otras dos; sino tambien para reducir en general á una sola fuerza quantas fuerzas se quisieren, quando están en un mismo plano, ó quando concurren todas en un mismo punto. Y recíprocamente podemos re-

resolver una ó muchas fuerzas en el número de fuerzas que Fig.
quisiéremos.

76 Pero antes de declarar cómo esto se egecuta, conviene prevenir que quando una fuerza *P* obra en un cuerpo, sea para impelerle, sea para tirar de él, es indiferente suponer aplicado el impulso de dicha fuerza al punto que se quisiere de su direccion.

Por egemplo, lo mismo tiene que la fuerza *P* tire del cuerpo *C* por el punto *P* por medio de una varilla infle- 7.
xible y sin masa, ó de un hilo inestensible y sin masa, que si tirára de él por el punto *A*, ó por el punto *B*, ó por el punto *C*, ó que le empuge en otro punto qualquiera *D* unido con dicho cuerpo: con tal que su impulso se dirija ácia una misma direccion, producirá constantemente el mismo efecto. La distancia no puede producir alteracion ninguna, sino en el caso, que aquí escluimos, de comunicarse el impulso de la potencia por medio de algun instrumento, como palanca ó cuerda, cuya masa puede consumir parte del impulso de la potencia.

Por lo que, si dos fuerzas *P* y *Q* que obran en un mis- 8.
mo plano, y cuyas direcciones son las lineas *AQ*, *BP* tiran ó empujan un cuerpo en los dos puntos *A* y *B*; dicho cuerpo se halla impelido del mismo modo que si las dos fuerzas le solicitasen en el punto de concurso *I*, siendo siempre las mismas sus direcciones.

Sentado esto, declaremos como se componen y resuelven las fuerzas.

Su-

Fig. 9. 77 Supongamos quatro fuerzas *P*, *Q*, *R*, *S* cuyas direcciones son las lineas *OP*, *AQ*, *BR*, *TS*, que están todas en un mismo plano. Prolonguemos desde luego, con el pensamiento, la direccion *PO* hasta que encuentre *AQ* en el punto *A*; y suponiendo que *AD*, *AE* son respectivamente los espacios que podria andar un mismo mobil en un mismo tiempo determinado, como de un segundo, en virtud del impulso de las dos fuerzas *P* y *Q*; si formamos el paralelogramo *AEID*, la diagonal *AI* representará la fuerza (70) derivada de las dos fuerzas *P* y *Q*, y podremos por consiguiente substituirla en lugar de dichas dos fuerzas.

Concibamos ahora que *AI* prolongada encuentra en *B* la direccion *BR* de la fuerza *R*; y si despues de hecha *BM* igual á *AI*, consideramos *BF* como el espacio que el mismo mobil podria andar en un segundo con el impulso de la fuerza *R*, y suponemos la fuerza *AI* aplicada en *B*; ya que representamos esta fuerza por $BM = AI$, del concurso de su accion con la fuerza *R* resultará una fuerza única representada por la diagonal *BG* del paralelogramo *BMGF*; suplirá, pues, esta fuerza por la fuerza *R* y por la fuerza *AI*; esto es, por las tres fuerzas *P*, *Q* y *R*.

Finalmente, concibamos que *BG* prolongada encuentra en *C* la direccion *TS* de la fuerza *S*, y hagamos $CK = BG$; supongamos que *CH* representa el espacio que el mismo mobil de antes puede andar en un segundo con el impulso de la fuerza *S*; en este caso, si imaginamos la fuerza *BG* aplicada en *C* ácia *CG*, y representada por *CK*; del

del concurso de esta fuerza con la fuerza *S* resultará un esfuerzo único representado por la diagonal *CN* del paralelogramo *CHNK*. Suplirá, pues, esta fuerza por la fuerza *S*, y por la fuerza *CK* ó *BG*; luego suplirá por las quatro fuerzas *P*, *Q*, *R*, *S*; luego es la derivada de dichas quatro fuerzas. Fig.

Esto hace patente como en qualquiera ocasion se puede y se consigue reducir á una sola fuerza quantas fuerzas se quisieren, quando están sus direcciones en un mismo plano.

78 Este egemplo manifiesta tambien como se pueden substituir en lugar de una sola fuerza quantas fuerzas se quisieren, y qué condiciones han de concurrir en ellas.

Por egemplo, si formamos un paralelogramo qualquiera *BFGM* cuya diagonal es *BG*, podremos substituir en lugar de la fuerza única *BG* dos fuerzas representadas por *BF* y *BM*. Y como podemos suponer cada una de estas dos fuerzas aplicada en el punto que quisiéremos de su direccion, podemos trasladar *BM* á *AI*, esté el punto *A* á la distancia que estuviere del punto *B*, y formar sobre *AI* otro paralelogramo qualquiera *AEID*; entónces en lugar de la fuerza *AI* se podrán substituir dos fuerzas representadas por *AE* y *AD*; de suerte que en lugar de la fuerza única *BG* se habrán substituido las tres fuerzas *BF*, *AE*, *AD* que producirán el mismo efecto que ella. 9.

79 Advertiremos que pues no hay mas condicion para determinar las fuerzas *AD*, *AE*, sino que sean representadas

Fig. sentadas por los lados *AD*, *AE* del paralelogrâmo *ADIE* cuya diagonal sería *AI*, lo que puede verificarse de infinitas maneras, sea que el paralelogramo *ADIE* esté en el plano del paralelogramo *FBMG*, ó que esté en otro plano qualquiera; se puede resolver una fuerza qualquiera *BG* en quantas se quisieren, y que esten en qualesquiera planos.

En adelante se verán los usos de esta composicion y resolucion de fuerzas.

80 El egemplo de resolucion que acabamos de dar, manifiesta que podremos hacer, siempre que quisiésemos que una de las fuerzas pase por ciertos puntos dados, que sea tambien de cierta cantidad determinada, y que sea pa-
10. ralela á ciertas lineas dadas. Si representa *AB*, por egemplo, una fuerza, y queremos substituir en su lugar otras dos, de las quales la una pase por un punto dado *O*, sea paralela á una linea dada de posicion *ST*, y sea al mismo tiempo de cierta cantidad *SK*; esto es, tal que en virtud de su accion pueda andar un mobil el espacio *SK* en el mismo tiempo que andaría la linea *AB* en virtud del impulso de la fuerza *AB*; los principios sentados nos dicen que para conseguirlo habríamos de practicar lo siguiente.

Por el punto *O* tiraríamos *OV* paralela á *ST*, de manera que encontrase *AB* en algun punto *V*. Tomaríamos $VR = SK$, y $VQ = AB$; tirando despues *RQ*, la tiraríamos por el punto *V* la paralela *VH* que rematase en el punto *H* de la linea *QH* paralela á *VR*; sería *VR* la fuerza que buscamos, y *VH* sería la que junta con *VR* supliría por *VQ* ó *AB*.

Hay

Hay un caso al qual no se aplica lo que acabamos de practicar, y es quando la linea *ST* es paralela á *AB*; pero muy en breve enseñaremos el modo de resolver en este caso la cuestion. Fig.

81 Conviene reparar que pues las dos fuerzas componentes ó primitivas *P* y *Q* son representadas por los dos lados *MD*, *MB* del paralelogramo *DMBE*, su resultante ó derivada debe por consiguiente ser representada por la diagonal *ME* del mismo paralelogramo, y llamando *R* esta resultante, sale *P* : *R* :: *MD* : *ME*, y *Q* : *R* :: *MB* : *ME*; esto es, *P* : *Q* : *R* :: *MD* : *MB* : *ME*, ó (porque *MD* = *BE*) :: *BE* : *MB* : *ME*. Pero el triángulo *MBE* da (I. 671) *BE* : *MB* : *ME* :: sen *BME* : sen *BEM* : sen *MBE*, ó ya que por ser *BE* paralela á *MD*, el ángulo *BEM* = *DME*, y por ser el ángulo *MBE* suplemento de *BMD* (I. 646) sen *MBE* = sen *BMD*, sale *BE* : *MB* : *ME* :: sen *BME* : sen *DME* : sen *BMD*; luego *P* : *Q* : *R* :: sen *BME* : sen *DME* : sen *BMD*; y por consiguiente si suponemos que sen *BME* espresa la fuerza *P*, sen *DME* espresará la fuerza *Q*, y sen *BMD* espresará la fuerza *R*; esto es, que *dos fuerzas componentes, y su derivada se pueden espresar respectiva y constantemente por el seno del ángulo formado por las direcciones de las otras dos.* 5. 6.

Por consiguiente podemos valernos para espresar las fuerzas, ó de las lineas tomadas en sus direcciones, ó de los senos formados por sus direcciones, con tal que para espresar cada una tomemos el seno del ángulo formado

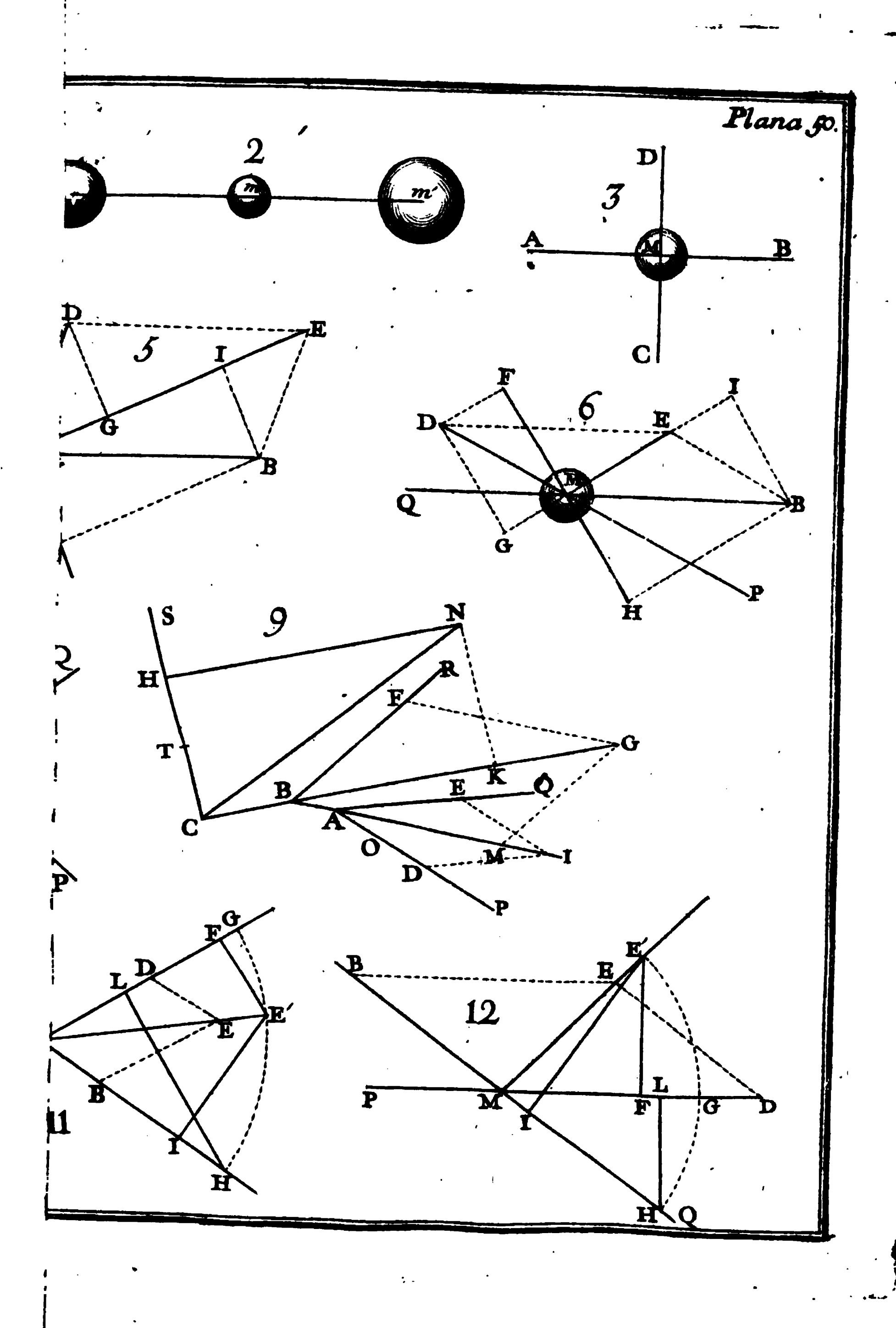
Fig. por las direcciones de las otras dos.

Este último modo de espresar las fuerzas, tiene su utilidad particular, conforme veremos mas adelante.

11. 82 Si desde el punto M como centro, y con un radio qualquiera ME', trazamos el arco de círculo $HE'G$
12. que encuentra en G y en H las direcciones prolongadas de las fuerzas P y Q; y si desde el punto E' tiramos las $E'F$, $E'I$ perpendiculares á MD, MB; y por el punto H la HL perpendicular á MD; se echará de ver que $E'F$, $E'I$, HL son respectivamente los senos de los ángulos DME, BME, BMD; tendremos, pues, $P : Q : R :: E'I : E'F : HL$.

83. Imaginemos ahora que pasando constantemente
13. por dos puntos fijos K y N las direcciones de las dos
14. fuerzas P y Q, su punto de concurso M se vaya apartando continuamente; se echa de ver que los senos de los ángulos BME, DME y BMD, menguarán continuamente, que por lo mismo se irán aproximando continuamente á confundirse con los arcos $E'H$, $E'G$, GH; luego si el punto M se apartare infinitamente, los senos $E'F$, $E'I$ y HL coincidirán todos con el arco GH, que se transformará en una linea recta perpendicular á las dos lineas MK y MN que entonces son paralelas una á otra (I. 336), y á la linea ME; y como siempre se verifica, que $P : Q : R ::$
13. $E'I : E'F : HL$; y entonces llega á ser $HL = E'I$
14. $+ E'F$, y $= E'I - E'F$, se infiere, que quando dos fuerzas P y Q tienen direcciones paralelas, 1.° *su derivada las es siempre paralela.* 2.° *que si se tira una linea*

FI


2
m
m′
3
D
A
M
B
C
5
D
E
I
G
B
6
F
I
D
E
Q
B
G
H
P
9
S
N
H
R
F
T
G
K
B
E
Q
C
A
O
M
I
D
P
G
F
L
D
E
E′
B
11
I
H
12
B
E′
E
L
P
M
F
G
D
I
H
Q

FI *perpendicular á dichas direcciones, cada una de dichas* Fig.
fuerzas es representada por la porcion de dicha perpendi- 15.
cular, comprehendida entre las direcciones de las otras dos. 16.
3.° *La derivada es igual á la suma de las dos componentes quando estas obran ácia una misma direccion, é igual á su diferencia, quando se dirige su impulso ácia direcciones contrarias.*

84 Ya que, segun hemos demostrado, $P : Q : R ::$ 15.
$EI : FE : FI$, tambien será $P : Q :: EI : FE$, y $P : R ::$ 16.
$EI : FI$; esto quiere decir, *que de las dos componentes, y su derivada, dos qualesquiera se han siempre recíprocamente como las dos perpendiculares tiradas á sus direcciones desde un mismo punto tomado en la direccion de la tercera.*

85 Si tiramos á arbitrio la linea ABC, tendremos (I. 451) $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$. Tambien tendremos $P : Q : R :: BC : AB : AC$; quiero decir, que en general, *si se cortan las direcciones de dos fuerzas paralelas, y de su derivada, con una linea recta tirada como se quisiere, se podrá representar constantemente cada una de dichas fuerzas por la porcion de dicha recta comprehendida entre las direcciones de las otras dos.*

86 De aquí se deduce un método para hallar la derivada de muchas fuerzas paralelas, y para substituir en lugar de una fuerza qualquiera quantas fuerzas paralelas se quisieren.

Supongamos, por egemplo, que queramos reducir á 15.
una sola las dos fuerzas P y Q que obran ácia una misma

Fig. parte. Tiraremos una linea qualquiera ABC; la derivada R debe ser igual á $P + Q$ (83); todo se reduce, pues, á hallar el punto B por donde debe pasar. Pero (85) tenemos $P : R :: BC : AC$; esto es $P : P + Q :: BC : AC$; habremos, pues, de tomar entre los dos puntos A y C un punto B tal que sea $BC = \frac{P \times AC}{P+Q}$.

16. Si las dos fuerzas obrasen ácia direcciones opuestas, será la derivada igual á su diferencia (83 *), esto es, será $P - Q$, ó $Q - P$. Supongamos P mayor que Q. Tirando á arbitrio la linea AC, se deberá prolongar mas allá de A respecto de C, hasta que la prolongacion sea $= AB$, de modo que sea $P : R :: BC : AC$ (85), ó $P : P - Q :: BC : AC$; esto es, se deberá tomar $BC = \frac{P \times AC}{P-Q}$.

Si fuese Q mayor que P, estaría el punto B en la linea AC prolongada á la otra parte de C respecto de A.

17. 87 Si hubiese otra fuerza K; en este caso despues de haber hallado la derivada R de las dos fuerzas P y Q, se buscaría la derivada S de las dos fuerzas R y K del mismo modo que si no hubiese habido mas fuerzas que estas, practicando cabalmente lo mismo que poco ha (86).

15. 88 Luego recíprocamente quando quisiésemos resolver
16. una fuerza qualquiera R en otras dos que la sean paralelas; tiraremos á arbitrio una linea PF paralela á la direccion de la fuerza R; y tomando en esta linea la direccion de una de las componentes, tomaremos á arbitrio por el valor de esta componente una cantidad qualquiera menor que R,

R, si quisiésemos que las dos componentes estén al uno y otro lado de la fuerza *R*; entonces la segunda componente que llamarémos *Q*, deberá ser igual á *R* — *P*; y para hallar su posicion no faltaria sino tirar la linea qualquiera *CBA*, y en la *AB* prolongada, tomar la porcion *BC* tal que sea *Q* : *P* :: *AB* : *CB*; si por el punto *C* tirásemos *QC* paralela á *RB*, será *QC* la direccion de la fuerza *Q*. Fig.

Pero si quisiéramos que las dos componentes estuviesen á un mismo lado, en cuyo caso deberian obrar ácia partes opuestas; entonces podríamos tomar por *P* una cantidad qualquiera menor ó mayor que *R*; y tirando una linea *PF* paralela á *RB*, que sería la direccion de *P*, tomaríamos en una linea qualquiera *BAC* el punto *C*, tal que *P* — *R* ó *R* — *P* : *R* :: *AB* : *AC*, sería *C* el punto por donde debería pasar la fuerza *Q* paralela á la fuerza *R*, cuyo punto estará á la otra parte de *A* respecto de *B*, si fuese *P* mayor que *R*; y al contrario estará entre *A* y *B*, si fuese *P* menor que *R*.

De los Momentos, y sus usos para la composicion y resolucion de las fuerzas.

89 Lo que acabamos de decir basta para componer y resolver las fuerzas, qualesquiera que sean sus direcciones y sus valores, por lo menos quando obran en un mismo plano. Pero las varías especies de movimientos de que se nos ofrecerá tratar, piden métodos mas sencillos y mas breves para determinar la resultante de las fuerzas, y su di-

Fig. direccion, cuyos métodos vamos á declarar.

18. 90 *Si desde un punto qualquiera* F *que esté en el pla-*
19. *no de un paralelogramo qualquiera* ABCD, *se tiran las líneas* FE, FH, FG *perpendiculares á los lados contiguos* AB, AD, *y á la diagonal* AC; *la suma de los productos de cada perpendicular por el lado sobre que cae, será igual al producto de la diagonal por la perpendicular que sobre ella cae, quando el punto* F *no esté, ni dentro del ángulo* BAD, *ni dentro de su opuesto. Al contrario, si está el punto* F *dentro del ángulo* BAD, *ó de su opuesto; la diferencia de los productos de cada perpendicular por el lado sobre que cae, será igual al producto de la diagonal por la perpendicular que sobre ella cayese.*

Prolónguese el lado BC hasta que encuentre en I la perpendicular FH; tírense las lineas FA, FB, FC, FD.
18. El triángulo $FAC = FAB + ABC + FBC = FAB + ADC + FBC$. Pero 1.° el triángulo $FAC = \frac{AC \times FG}{2}$. 2.° el triángulo $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$. 3.° el triángulo ADC', considerando AD como su base, y IH como su altura, es $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4.° el triángulo $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; luego $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; pero $IH + FI = FH$; luego multiplicándolo todo por 2, saldrá $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$.

El triángulo $FAC = ABC - FAB - FBC =$
19. $ADC - FAB - FBC$; quiero decir, que $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; ó (considerando que $BC = AD$, y que $IH - FI = FH$, y multiplicándolo todo por

por 2) $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$. Fig.

91 Ya que demostramos arriba que dos fuerzas qualesquiera, y su derivada, se pueden representar respectivamente por los lados, y la diagonal de un paralelogramo formado sobre sus direcciones; inferiremos que si P y 18.
Q son dos fuerzas representadas por las lineas AB, AD 19.
en cuyo caso AC representará su derivada R; inferiremos, digo, que si fuera del ángulo BAD, y de su opuesto se toma un punto F en el plano de dichas tres fuerzas, siempre se verificará que $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; y quando estuviere el punto F dentro del ángulo BAD ó de su opuesto, siempre se verificará que $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

92 El producto de una fuerza por la distancia de su direccion á un punto fijo, es lo que llamamos *Momento* de dicha fuerza. Así $Q \times FH$ es el momento de la fuerza Q; $R \times FG$ es el momento de la fuerza R.

93 Como la medida de las fuerzas es la cantidad de movimiento, esto es, el producto de una masa determinada por la velocidad que pueden comunicar á dicha masa; el valor del momento de una fuerza qualquiera será por consiguiente el producto de una masa por su velocidad, y por la distancia de su direccion á un punto fijo.

94 Si imaginamos que las perpendiculares FH, FG, FE sean lineas inflexibles y sin masas, atadas unas con otras, y afianzadas en el punto F, de modo que no puedan hacer mas que *girar* ó dár vueltas al rededor de dicho punto; y que

Fig. las fuerzas P, Q, y su derivada R obran en los estremos
18. E, H, G; se echa de ver que estas tres fuerzas intentan todas hacer girar el systéma ácia una misma direccion al rededor del punto F; y las dos fuerzas Q y R intentan hacer girar el systéma ácia una direccion diferente de aque-
19. lla ácia la qual la fuerza P procura hacerle girar.

Se puede, pues, decir que *el momento de la resultante tomado respecto de un punto fijo qualquiera* F, *es siempre igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las dos componentes, segun que estas intentan hacer girar ácia una misma direccion, ó ácia direcciones opuestas al rededor de dicho punto fijo.*

20. 95 De aquí se puede inferir en general *que sea el que fuese el número de fuerzas* P, Q, S, T &c., *y sean las que fueren sus cantidades y direcciones, con tal que estén todas en un mismo plano; el momento de la resultante de todas estas fuerzas, tomado respecto de un punto* F *el que se quisiere, que esté en el mismo plano, será siempre igual á la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion al rededor de dicho punto, menos la suma de los momentos de las que intentan hacer girar ácia una direccion contraria.*

Con efecto, si suponemos que sea r la resultante de las dos fuerzas P y Q dirigidas en AP y EQ; r', la de r y S, que obra ácia GS; y finalmente R la de r' y T, que obra ácia DT; si á mas de esto suponemos que sea m el momento de r; m' el de r'; entonces bajando las per-

pen-

pendiculares FA, FE, FG, FD, FB á las componentes Fig.
P, Q, S, T, y su derivada R, tendremos 1.° $m = P \times AF + Q \times EF$. 2.° $m' = m - S \times FG$. 3.° $R \times FB = m' - T \times FD$; luego sumando estas tres equaciones, y eliminando las cantidades semejantes que se hallaren en ambos miembros, tendremos $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$: en cuya espresion se echa de ver que los momentos de las dos fuerzas T y S, que intentan hacer girar de la derecha ácia la izquierda, son con efecto de signo opuesto respecto de los de las fuerzas P y Q, que intentan hacer girar de la izquierda ácia la derecha.

96 Si estuviese el punto F en la direccion misma de la derivada, el momento de esta fuerza sería entonces cero; luego ya que es igual á la suma de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion, menos la suma de aquellas que intentan hacer girar ácia una direccion contraria, debemos concluir que la diferencia de estas dos sumas de momentos, tomados respecto de un punto qualquiera de la direccion de la resultante, es cero.

Y recíprocamente, *si la suma de los momentos de muchas fuerzas que intentan hacer girar al rededor del punto, menos la suma de los momentos de las que intentan hacer girar ácia una direccion opuesta al rededor del mismo punto, fuese cero; se deberá inferir que pasa la derivada por dicho punto.*

97 Ya que estas proposiciones son igualmente verdaderas, qualesquiera ángulos que formen unas con otras las di-

Fig. direcciones de las fuerzas, lo serán tambien quando forman las fuerzas ángulos infinitamente pequeños, ó, lo que viene á ser lo propio, quando son paralelas unas á otras las direcciones de las fuerzas.

98 De aquí es facil sacar un método muy sencillo para hallar la posicion y el valor de la derivada de quantas fuerzas se quisieren, quando obran todas en un mismo plano.

Supongamos primero que todas son paralelas unas á otras; y para abreviar, supongamos que no son sino tres las fuerzas; será facil inferir lo que se deberá practicar quando fuere mayor su número.

21. Sean, pues, tres fuerzas conocidas P, Q, S, de las quales las dos primeras obran ácia AP, BQ, y la última obra ácia CS. Tiremos á arbitrio una linea qualquiera $FABC$ perpendicular á las direcciones AP, BQ &c. Fingiremos que está en D el punto por donde debe pasar la derivada R. Hecho esto, tomaremos á arbitrio un punto F en la $FABC$, y tendremos, en virtud de lo dicho, $P \times AF + Q \times BF + S \times CF = R \times DF$; pero como las distancias AF, FB, FC, y las fuerzas P, Q, S son conocidas, sería muy facil sacar de esta equacion el valor de la distancia DF á que pasa la resultante, si fuese conocido el valor de esta resultante R. Busquémosle, pues, este valor de la derivada.

Tomemos otro punto F' en la AF prolongada: el mismo principio nos dará $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Pero si de esta segunda equacion restamos la prime-

mera, y reparamos que $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF$ Fig.
$= FF'$, $CF' - CF = FF'$, $DF' - DF = FF'$, saldrá $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$; esto es, partiéndolo todo por FF', $P + Q - S = R$.

Bien se echa de ver que la evidencia de lo que acabamos de probar es independiente del número de las fuerzas, y que será igualmente cierto sea el que fuere su número. Se debe, pues, inferir en general que *la resultante de quantas fuerzas paralelas se quisieren, es igual á la suma de las que obran ácia una direccion, menos la suma de las que obran ácia una direccion contraria.*

Si en la equacion $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$, que hallamos primero, subtituimos en lugar de R su valor $P + Q - S$, que acabamos de sacar, saldrá $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = (P + Q - S) \times DF$; de donde inferiremos $DF = \frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$.

Y como la demostracion es independente del número de las fuerzas, quedará probado que en general *para saber á qué distancia de un punto dado pasa la derivada de muchas fuerzas paralelas; es menester restar de la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion, la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion opuesta, y partir la resta por la suma de las fuerzas que obran ácia una direccion, menos la suma de las que obran ácia una direccion contraria.* *

Si

* No se han de confundir las fuerzas que obran ácia direcciones contra-

Fig. 99 Si en vez de tomar el punto F á arbitrio, le to-
21. máramos en el mismo punto D por donde pasa la fuerza derivada, como entonces sería cero la distancia DF, su valor $\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$, que vendria á ser $\frac{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P + Q - S}$ (porque la fuerza P intenta hacer girar al rededor del punto D ácia una direccion opuesta ácia la qual intenta hacer girar la fuerza Q) sería cero; tendriamos, pues, $-P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; y como el punto F que al principio tomamos á arbitrio, podia estar mas arriba ó mas abajo, conforme hubiésemos querido, porque nada determina que el punto D esté en un punto de la direccion de la resultante R, antes que en otro punto de la misma direccion; se infiere generalmente que *los momentos de muchas fuerzas paralelas tomados respecto de un punto qualquiera de la direccion de la resultante son tales, que la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion, es siempre igual á la suma de los momentos de las que intentan hacer girar ácia una direccion contraria.*

Lue-

trarias, con las que procuran hacer girar ácia direcciones contrarias. Puede suceder que dos fuerzas que obran ácia direcciones encontradas, intenten hacer girar ácia una misma direccion; esto pende de la posicion del punto respecto del qual se considera la *giracion* ó rotacion, ó los momentos. Por egemplo, las dos fuerzas Q y S obran ácia direcciones opues-
21. tas; pero ambas intentan hacer girar la linea BC ácia una misma direccion al rededor del punto que esté entre B y C; y si consideramos la giracion respecto del punto F, la fuerza Q intenta hacer girar CF ácia una direccion contraria, respecto de la direccion ácia la qual la fuerza S procura hacerla girar.

100 Luego tomando con signos contrarios los momen- Fig.
tos de las fuerzas que intentan hacer rodar ácia direcciones contrarias, y tomando igualmente con signos contrarios las fuerzas que obran ácia direcciones opuestas, se puede decir generalmente. 1.° *Que la derivada de quantas fuerzas paralelas se quisieren, es siempre igual á la suma de todas las fuerzas.* 2.° *Que esta derivada que es paralela con las primitivas, pasa por una serie de puntos que tienen todos la propiedad de que la suma de los momentos respecto de cada uno de ellos es cero.*

Son de muchísimo uso estos principios, y dentro de poco veremos quanto facilitan determinar la posicion del centro de gravedad de los cuerpos. Tratemos ahora de las fuerzas cuyas direcciones forman ángulos unas con otras.

101 Sean, pues, muchas fuerzas *P*, *Q*, *S* &c. todas 22.
dirigidas en un mismo plano. Supongamos que *AB* represente la fuerza *P* que obra ácia *AP*; que *EG* represente la fuerza *Q* que obra ácia *EQ*; y que *IL* represente la fuerza *S* que obra ácia *IS*. Imaginemos que por un punto *T* tomado á arbitrio en el plano de dichas fuerzas, pasan dos rectas indefinitas TE', TE'', que forman una con otra un ángulo qualquiera (que supondremos recto para mayor facilidad); y concibamos que las fuerzas *P*, *Q*, *S*, ó *AB*, *EG*, *IL* se resuelven cada una en otras dos tales, que la una sea paralela á la linea TE'; y la otra paralela á la linea TE''; cada una de estas fuerzas debe estar figurada por el lado correspondiente del paralelogramo, cuya diago-

Fig. gonal representa (73) la fuerza principal. Es evidente, en virtud de lo que precede (98), que por ser paralelas las fuerzas *AD*, *EF*, *IM* tendrán por resultante la fuerza única *VO* que será paralela con ellas, y será $= AD + EF - IM$, y pasará á una distancia VV', tal que $VV' = \frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + FE - IM}$.

Las fuerzas *AC*, *EH*, *IK* paralelas á TE'' se reducirán tambien todas á una sola *VN* que será paralela con ellas, será igual á $AC + EH + IK$, y (suponiendo que sea *V* el punto donde la direccion de dicha fuerza encuentra la de la fuerza *OV*) pasará á una distancia $VV'' = \frac{AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''}{AC + EH + IK}$.

Sentado esto, una vez que, segun suponemos, las fuerzas *P*, *Q*, *S* y sus direcciones (esto es, los ángulos que forman con lineas fijas y conocidas, quales son TE' y TE'', ó con sus paralelas) son conocidas, conoceremos en cada uno de los triángulos *BAD*, *GEF*, *IKL* la hypotenusa y los ángulos; sera, pues, facil determinar las lineas *AD*, *EF*, *KL* ó *IM*, y las lineas *BD* ó *AC*, *FG* ó *EH*, y *IK*; con lo que estarán determinados los valores de las dos resultantes $AD + EF - IM$, y $AC + EH + IK$. A mas de esto, como han de ser conocidas las distancias AA', AA''; EE', EE'' &c. pues no se puede ignorar la posicion de los puntos *A*, *E*, donde se supone que se aplican las fuerzas, serán por consiguiente conocidas todas las cantidades que lleva la espresion de las distancias VV' y VV''. Será, pues, facil determinar el punto *V*, donde se encuentran dichas

dos

dos fuerzas derivadas. Tomando, pues, $VO = AD + EF - IM$, y $VN = AC + EH + IK$, y formando el paralelogramo $OVNX$, saldrá la diagonal VX que será la derivada R de las dos resultantes paralelas á TE' y TE'', esto es, la derivada de todas las fuerzas propuestas. Fig.

De las Fuerzas que obran en diferentes planos.

102 Sean tres fuerzas P, Q, S, cuyas direcciones sean las lineas AP, BQ, CS paralelas unas con otras y tiradas en diferentes planos. 23.

Concibamos un plano XZ al qual sean perpendiculares las tres rectas AP, BQ, CS, y otro plano ZV al qual sean paralelas; sean A, B, C los puntos donde estas lineas encuentran el plano XZ.

Las dos fuerzas P y S estan en un mismo plano cuya interseccion con el plano XZ es la recta AC. Pueden por consiguiente reducirse estas dos fuerzas á una sola $R' = P + S$ que sea paralela con ellas, y pasará por un punto D tal, que (99) tendremos $P \times AD = S \times CD$.

Las dos fuerzas R' y Q estan en un mismo plano cuya interseccion con el plano XZ es BD; pueden por consiguiente reducirse á una sola R que será igual á $R' + Q$, esto es $= P + S + Q$, que será paralela con ellas, y pasará por un punto E, tal que tendremos $R' \times DE = Q \times BE$. De esto y de lo dicho antes facil es inferir, en general, que *sea el que fuere el número de las fuerzas, cuyas direcciones son paralelas, siempre se reducirán á una sola*

igual

Fig. *igual á la suma de las que obran ácia una direccion, menos la suma de las que obran ácia una direccion contraria, ora estén todas en un mismo plano, ora estén en planos distintos.*

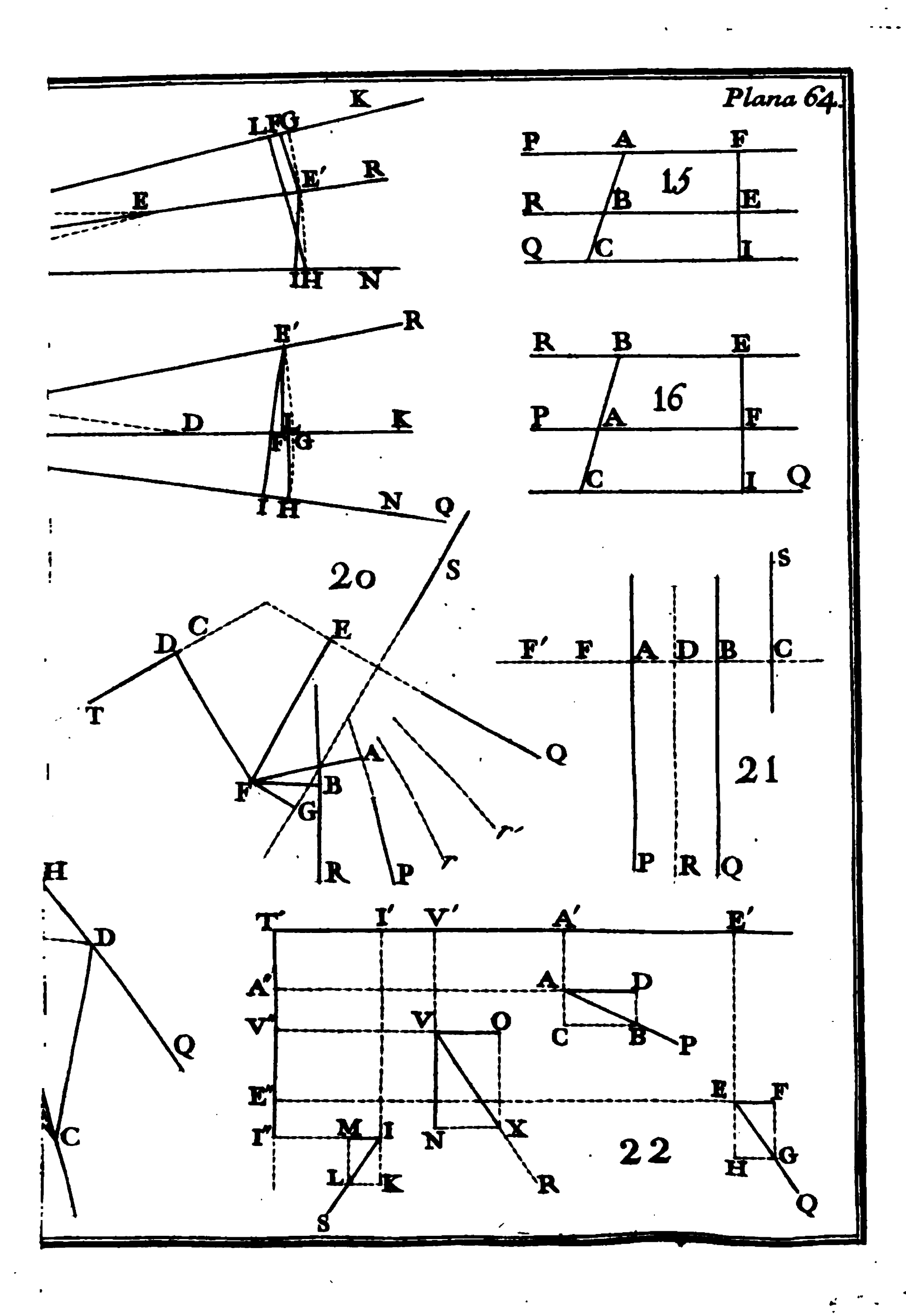
Determinemos ahora el punto por donde pasa esta derivada.

Si por los puntos A, D, C, B, E se tiran las lineas AA', DD', CC', BB', EE' perpendiculares á la interseccion comun de los dos planos XZ y ZV; del paralelismo de las lineas AA', DD', CC' inferirémos (I. 450) $AD : CD :: A'D' : C'D'$; pero de la equacion $P \times AD = S \times CD$ que hallamos poco antes, se saca $AD : CD :: S : P$; luego $A'D' : C'D' :: S : P$, y por lo mismo $P \times A'D' = S \times C'D'$.

Asimismo las paralelas DD', EE', BB' dan $DE : BE :: D'E' : B'E'$; y como de la equacion $R' \times DE = Q \times BE$, que tambien hallamos poco antes, se saca $DE : BE :: Q : R'$; se sigue que $D'E' : B'E' :: Q : R' :: Q : P + S$; luego $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Tomemos ahora en la interseccion ZT de los dos planos un punto fijo T, y busquemos la distancia TE' que habrá entre dicho punto y el punto E' que corresponde al punto E por donde pasa la derivada. Es evidente que $A'D' = TD' - TA'$, $C'D' = TC' - TD'$, $D'E' = TE' - TD'$, $B'E' = TB' - TE'$. Substitúyanse estos valores en las dos equaciones $P \times A'D' = S \times C'D'$, y $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, saldrá $P \times TD' - P \times$

TA'



15
16
20
21
22

$TA' = S \times TC' - S \times TD'$, y $(P+S) \times TE' - (P+S)$ Fig.
$TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. De la primera de estas dos equaciones se saca $(P+S)\,TD' = P \times TA' + S \times TC'$; substituyendo este valor en la segunda, sale $(P+S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; juntando todos los términos multiplicados por TE', saldrá $(P+Q+S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$. De donde inferiremos $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P+Q+S}$.

Esta espresion de la distancia TE' es cabalmente la misma que hallaríamos si buscásemos á que distancia pasaría la fuerza resultante, si las tres fuerzas P, Q, S estubiesen todas tres en el plano ZV, y pasasen por los puntos A', C', B' correspondientes á los puntos A, C, B por donde pasan realmente. Luego si imaginamos la recta TX perpendicular al plano ZV, hallaremos la distancia TE' de la resultante R á dicha recta, tomando la suma de los momentos * de esta misma recta, como si todas las fuerzas, sin que variase la distancia á que están de dicha recta, estubiesen todas en el plano ZV al qual es perpendicular; y partiendo esta suma de los momentos por la suma de las fuerzas.

Para determinar el punto E, solo falta conocer la dis-

* Prevenimos que aquí y en adelante por *suma* de los momentos en general entendemos la suma de los momentos de las fuerzas que intentan girar ácia una direccion, menos la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar ácia una direccion contraria. Por *suma* de las fuerzas tambien entendemos la suma de las que obran ácia una direccion, menos la suma de las que obran ácia una direccion opuesta.

Fig. tancia EE', ó, (tirando EE'' paralela á ZT) la distancia TE'' á la qual esta misma fuerza pasa de ZT. Por lo que acabamos de decir en orden á la distancia TE', se echa de ver que para hallar la distancia TE'', hemos de imaginar igualmente un plano que pase por XT, y paralelo á las direcciones de las fuerzas; tomar la suma de los momentos respecto de TZ que es la interseccion de dicho plano con el plano ZV; tomar digo la suma de los momentos respecto de TZ, como si todas las fuerzas sin que varíe la distancia á que están del plano ZV, estuviesen todas en el plano XV; y partir dicha suma de momentos por la suma de las fuerzas. Hecho esto, quedará determinado quanto se necesita para fijar el punto E por donde pasa la derivada.

Consideremos ahora las fuerzas cuyas direcciones ni están en un mismo plano, ni son tampoco paralelas.

24. 103 Sean P, Q, R tres fuerzas cuyas direcciones son las lineas AP, BQ, CR puestas en planos diferentes. Concibamos un plano qualquiera XZ al qual encuentra en H la direccion AP; en F, la direccion BQ; y en L, la direccion CR. Como podemos suponer (76) qualquiera fuerza aplicada al punto que se quiera de su direccion, imaginaremos que dichas tres fuerzas están aplicadas á los puntos H, F, L, y son representadas por las lineas HV, FT, LK que son las prolongaciones de las lineas AP, BQ, CR debajo del plano XZ; y supondremos que dichas fuerzas son representadas por las lineas HV, FT, LK. Concibamos tambien que por las rectas AH, BF, CL pasen planos per-

pen-

pendículares al plano *XZ*, y cuyas intersecciones con este Fig. sean las rectas *GHN*, *EFY*, *DLM*. Esto supuesto, es evidente que podemos resolver cada una de dichas fuerzas en otras dos, de las quales esté la una en el plano *XZ*, y la otra sea perpendicular al mismo plano. Por egemplo, podemos resolver la fuerza *HV* en una fuerza cuya direccion sea *HN*, y en otra fuerza cuya direccion sea *HO* perpendicular al plano *XZ*. De suerte que en lugar de las tres fuerzas *HV*, *FT*, *LK* podemos substituir las seis fuerzas *HN*, *FY*, *LM*, *HO*, *FS*, *LI*, de las quales las tres primeras están en el plano *XZ*, y las tres últimas son perpendículares al mismo plano.

Pero, por lo dicho (101), se pueden reducir las tres fuerzas *HN*, *FY*, *LM* á una sola que tambien estará en el plano *XZ*. Y en virtud de lo que acabamos de decir (102) se pueden reducir las tres fuerzas *HO*, *FS*, *LI* á una sola que será perpendicular al plano *XZ*. Luego, en general, *qualquiera que sea el número de las fuerzas*, *y qualesquiera que sean sus direcciones*, *se pueden reducir en todos los casos quando mas á dos*, *la una dirigida en un plano conocido*, *y la otra perpendicular al mismo plano*.

104 No sucede, pues, lo mismo con las fuerzas cuyas direcciones están en diferentes planos, que con las que están todas en un mismo plano. Estas siempre se pueden reducir á una sola, conforme hemos probado. Pero aquellas se reducen á dos, que no se podrán reducir á una sola, sino quando la fuerza resultante de las que obran en el plano *XZ*,

Fig. encontrase la derivada de las fuerzas perpendiculares al mismo plano.

105 Esto puede servir para hallar las dos resultantes de quantas fuerzas se quisieren quando las direcciones de dichas fuerzas están en planos diferentes. No obstante vamos á enseñar otro camino para hallar lo mismo, que facilita muchísimo la resolucion de muchas cuestiones.

25. Sea, pues, P una qualquiera de las fuerzas propuestas, y AB la linea que la puede representar. Sea X un punto fijo qualquiera: XZ, XY, XT tres rectas perpendiculares unas á otras. Si sobre AB como diagonal se construye el paralelogramo rectángulo $ADBC$, cuyo plano sea perpendicular al plano YXT, y cuyo lado BC sea paralelo á XZ, y se construye despues sobre BD como diagonal el paralelogramo rectángulo $DFBE$, cuyo plano sea paralelo al plano YXT, y cuyos lados BF, BE sean paralelos á las rectas XT, XY; es constante 1.° que en lugar de la fuerza AB se podrá substituir la fuerza BC paralela á XZ, ó perpendicular al plano YXT, y la fuerza BD paralela al mismo plano, 2.° que en lugar de la misma fuerza BD se podrá substituir la fuerza BE paralela á XY, ó perpendicular al plano ZXT, y la fuerza BF paralela á XT, ó perpendicular al plano ZXY; de suerte que la fuerza P ó AB se hallará resuelta en tres fuerzas paralelas á tres lineas perpendiculares unas á otras, ó lo que viene á ser lo mismo, se hallará resuelta en tres fuerzas perpendiculares á tres planos, que serán perpendiculares unos á otros.

Pe-

Pero lo que decimos de la fuerza P, se puede aplicar evidentemente á otra fuerza qualquiera que no fuese perpendicular á ninguno de estos tres planos. Luego si concebimos todas las fuerzas como P resueltas como hemos dicho, y se reducen despues á una sola por el método declarado (102), todas las fuerzas perpendiculares al plano ZXT, si se practíca lo mismo con las fuerzas perpendiculares al plano ZXY, y tambien con las fuerzas perpendiculares al plano YXT; se echa de vér que siempre se podrán reducir quantas fuerzas se quisiesen, dirígidas en diferentes planos, á tres fuerzas perpendiculares á tres planos que sean perpendiculares unos á otros. Estos son los principios generales de la composicion, y resolucion de las fuerzas.

De los Centros de Gravedad.

106 Antes de indagar qué efectos particulares pueden producir en las máquinas, ó en general en los cuerpos de una estructura, y de una materia conocida las fuerzas cuyas propiedades generales acabamos de considerar, es preciso pararnos á considerar los centros de gravedad, cuyo conocimiento es de suma importancia para determinar los movimientos que se les pueden comunicar á dichas máquinas ó cuerpos.

Tengamos presente (43) que las direcciones ácia las quales obra la pesantez en las partículas materiales de un cuerpo, son paralelas; y que esta fuerza inten-

Fig. ta comunicar á cada partecilla de materia una misma velocidad en un mismo tiempo.

107 Llamamos *Centro de Gravedad* de un cuerpo, ó de un systema de cuerpos el punto por donde pasa la derivada de las fuerzas particulares, que comunicaría la pesantez á cada parte de dicho cuerpo ó systema, en qualquiera situacion que se coloque dicho cuerpo ó systema.

Por egemplo, si en la posicion actual del triángulo *ABC* la fuerza resultante de los impulsos de la pesantez en todas las partes de dicho triángulo pasa por un punto
26. *G* de su superficie; y si en otra situacion *abc*, pasa igualmente por el punto *G*, este punto *G* se llama el centro de gravedad. Veremos dentro de poco que dicha resultante pasa siempre por un mismo punto en todas las situaciones posibles del cuerpo.

108 Es facil determinar este centro en virtud de lo que hemos dicho acerca del uso de los momentos para hallar la resultante de muchas fuerzas paralelas.

27. Con efecto, sean quantos cuerpos se quisieren *M*, *N*, *P*, cuyas masas consideraremos (por ahora), como reconcentradas en los puntos *B*, *A*, *C*, que supondremos primero en un mismo plano. Sea *p* la velocidad que la pesantez intenta comunicar á cada uno en un instante, cuya velocidad es (43) la misma respecto de cada uno. Entonces *pM*, *pN*, *pP* serán las cantidades de movimiento, ó las fuerzas con que estos cuerpos intentarán mover-

se

se en las direcciones paralelas $C''C$, $B''B$, $A''A$. Pero segun digimos (98) para hallar la posicion de la fuerza derivada, se debe tomar la suma de los momentos respecto de un punto qualquiera T tomado en una linea perpendicular á dichas direcciones, y partir dicha suma por la suma de las fuerzas; será, pues, el valor de la distancia TG'', á que pasa dicha resultante $TG'' = \frac{pM \times TB'' + pN \times TA'' + pP \times TC''}{pM + pN + pP}$, cuyo valor, si omitimos el factor comun p, se reduce á $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TC''}{M + N + P}$. Pero si tiramos las lineas BB', AA', CC' paralelas á TG'', y que rematan en la vertical TC'; si imaginamos á mas de esto, que el punto G tomado en la direccion de la resultante, es el centro que buscamos, y tiramos GG' tambien paralela á TG'', tendremos $TG'' = G'G$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC'' = CC'$; luego $GG' = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times CC'}{M + N + P}$; si limitamos el sentido de la voz momentos para que signifique no mas que el producto de la masa de un cuerpo por la distancia á que está de una linea recta, el valor de GG' está diciendo que

Se determina á qué distancia está de una linea recta el centro comun de gravedad de muchos cuerpos dividiendo la suma de los momentos de dichos cuerpos (tomados respecto de dicha linea) por la suma de las masas.

Concibamos ahora que se trastorna el systema de los cuerpos M, N, P, de modo que la linea TA'' que era orizontal, sea vertical, y sea orizontal la linea TC' que era vertical; en este supuesto demostraremos igualmente, que

para hallar á qué distancia pasa la derivada de la linea TA'', que entonces será vertical, se debe tomar la suma de los momentos respecto de TA'', y partirla por la suma de las masas. Tendremos, pues, igualmente $GG'' = \ldots\ldots$ $\frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times CC''}{M + N + P}$. Pero una vez determinadas las distancias á que está G de las dos lineas fijas, y conocidas TA'' y TC', será conocida la posicion de dicho centro, pues las distancias BB', BB'', AA', AA'', &c. son conocidas, porque está á nuestro arbitrio tomar donde quisiésemos, el punto T, por el qual se tiran TA'' y TC'; luego &c.

109 Si cada una de las distancias AA'', BB'', &c. fuese cero; esro es, si estuviesen todos los cuerpos en una linea recta TA'', entonces la suma de los momentos respecto de dicha recta, sería cero; luego la distancia GG'' será tambien cero. Luego *si muchos cuerpos considerados como puntos están en una misma linea recta, su centro comun de gravedad estará tambien en la misma linea recta.*

110 Si se tirasen las lineas TA'', TC', de manera que la una, ó la otra, ó ambas tuviesen cuerpos á uno, y otro lado; en este caso, en lugar de la suma de los momentos se deberia decir la suma de los momentos de los cuerpos que están á un lado, menos la suma de los momentos de los cuerpos que están al otro lado. Por lo que mira al denominador de la fraccion que espresa la distancia del centro de gravedad, siempre se compondrá de la suma de las masas, porque todas las fuerzas de estas masas,

en

en virtud de su gravedad, obran ácia una misma direccion. Fig.
Esto es general, sea el que fuere el número de los cuerpos, considerándolos como puntos, y como que están todos en un mismo plano. Esto es una consecuencia de lo dicho antes (98).

Las lineas TA', TA'' se llaman *Eges de los Momentos.*

111 Si concebimos ahora, que el punto T, que al principio hemos tomado á arbitrio, se confunde con el punto G, en este caso GG' y GG'' serán cada una cero. Luego la suma de los momentos respecto de TC', y la suma de los momentos respecto de TA'', serán ambas cero en este caso.

112 Ahora probaremos que si la suma de los momentos de muchos cuerpos respecto de la recta RS que pasa 28.
por el punto G, fuere cero, y lo fuere igualmente la suma de los momentos respecto de la recta PQ perpendicular á RS, y que pasa por el mismo punto G; la suma de los momentos respecto de otra recta qualquiera MN, que pasare por el mismo punto G, será tambien cero.

Con efecto, si despues de tiradas las perpendiculares AA', AA'', AA''' á las lineas PQ, RS, MN; suponemos que AA' encuentra MN en el punto I; el triángulo rectángulo $GA'I$ dará sen GIA, ó cos $PGM : GA'$ ó $AA'' ::$ sen $PGM : A'I = \frac{AA'' \text{ sen } PGM}{\cos PGM}$; luego $AI = AA' - A'I = AA' - \frac{AA'' \text{ sen } PGM}{\cos PGM}$. Pero del triángulo rectángulo IAA''' se infiere (suponiendo el radio $= 1$) $1 : AI ::$ sen AIA''' ó cos $PGM : AA'''$; luego $AA''' = AI \times \cos PGM$, esto

es

es $AA''' = AA'$ cos PGM — AA'' sen PGM; y por consiguiente multiplicando por la masa A inferiremos, que el momento $A \times AA''' = A \times AA' \times$ cos PGM — $A \times AA''$ $\times$ sen PGM; esto es, que el momento del cuerpo A respecto del ege MN, es igual al coseno del ángulo PGM, multiplicado por el momento respecto del ege PQ, menos el seno del mismo ángulo PGM, multiplicado por el momento respecto del ege RS.

Ya se vé que lo mismo se probará respecto de otro cuerpo qualquiera, sin mas diferencia que la de los signos, segun estuvieren los cuerpos á un mismo lado, ó en distintos lados respecto de MN. Luego si se forma una suma de todos los momentos respecto del ege MN, se hallará que es igual al coseno del ángulo PGM, multiplicado por la suma de los momentos respecto de PQ, menos el seno del ángulo PGM, multiplicado por la suma de los momentos respecto de RS. Y como por el supuesto, cada una de estas dos sumas es cero, sus productos por el seno, y por el coseno del ángulo PGM serán cero; luego igualmente *la suma de los momentos respecto de un ege qualquiera* MN *que pasa por el punto de gravedad* G, *es cero.*

113 Inferamos, pues, de todo lo dicho, que la accion resultante de todas las acciones particulares de la pesantez en cada una de las partes de un systema de cuerpos, siempre pasa por un mismo punto de dicho systema, esté en la situacion que estuviere el systéma, porque solo res-

respecto de la direccion de la resultante puede ser cero (100) la suma de los momentos de muchas fuerzas paralelas. Fig.

Aunque hasta aquí solo hemos hablado de los cuerpos cuyos centros de gravedad están en un mismo plano, no por esto dexa de aplicarse lo dicho á los casos en que las partes del systema están en diferentes planos; y lo probaremos.

114 Si los cuerpos, considerándolos siempre como puntos, no están en un mismo plano, imaginaremos un plano orizontal *XZ*, é imaginaremos que por cada uno de los puntos graves, ó pesados *P*, *Q*, *S* se hayan tirado las verticales *PA*, *QB*, *SC*; para determinar el punto *E* por donde pasa la resultante *RE*, en cuya direccion debe estar el centro de gravedad, tomaremos los momentos (102) respecto de dos rectas fijas *TX*, *TZ*, que estén en el plano orizontal *ZX*, y sean perpendiculares una á otra, tomaremos, digo, la suma de los momentos, como si estuviesen todos los cuerpos en dicho plano orizontal; y partiendo cada una de estas dos sumas de momentos por la suma de las masas *P*, *Q*, *S*, hallaremos las dos distancias $E'E$, $E''E$. Determinadas estas, solo nos faltará averiguar á qué distancia *EG* debajo del plano orizontal *XZ* está dicho centro. Pero si concebimos trastornada la figura de modo que el plano *XZ* sea vertical, y *ZV* el plano orizontal, echaremos de ver en virtud del mismo principio, que para hallar la distancia $E'G'$ correspondiente é igual á la altu- 23.

ra

Fig. ra que se busca EG, deberemos tomar la suma de los momentos respecto de ZT, como si estuviesen todos los cuerpos en el plano ZV, y partir esta suma de momentos por la suma de las masas; con esto conoceremos quanto necesitamos para determinar la posicion del centro de gravedad.

115 Luego para resumir; la investigacion del centro de gravedad se reduce

29. 1.° Quando todos los cuerpos, considerados como puntos, están en una misma linea recta, á tomar la suma de los momentos respecto de un punto fijo F tomado á arbitrio en dicha linea, y partir dicha suma por la suma de las masas; el cociente dirá á qué distancia del punto F pasa el centro de gravedad.

2.° Quando todos los cuerpos considerados como pun-
27. tos están en un mismo plano; se concebirán tiradas por un punto T tomado á arbitrio en dicho plano, dos lineas TA'', TA' perpendiculares una á otra; y tirando perpendiculares desde cada punto pesado á cada una de dichas dos lineas, se imaginará que dichos puntos pesados están sucesivamente aplicados á la linea TA'', y á la linea TA', cada uno en el punto donde remata su perpendicular. Y se buscará, como en el caso antecedente, qual es entonces el centro de gravedad G'' en la TA'', y qual es el centro de gravedad G' en la TA; y tirando finalmente por dichos puntos las lineas $G''G$, $G'G$ paralelas á TA' y TA'', el punto G donde concurrieren será el centro de gravedad que se buscaba.

3.°

3.° Finalmente, quando los cuerpos considerados como puntos estuvieren en diferentes planos, se concebirán tres planos, el uno orizontal, y los otros dos verticales, y perpendiculares unos á otros. Desde cada punto pesado se bajará una perpendicular á cada uno de dichos planos; se tomará la suma de los momentos respecto de cada plano, y partiendo cada suma por la suma de las masas, se hallarán las tres distancias á que estará de cada uno de dichos planos el centro de gravedad. Fig. 23.

116 Pero en estas operaciones es indispensable tener siempre presente, que quando algunos de los cuerpos están en partes opuestas respecto del punto, ó de la linea, ó del plano á que se refieren los momentos, se deben tomar con signos contrarios los momentos de los cuerpos que están á lados opuestos.

117 No podemos menos de hacer aquí una prevencion que nace de suyo de lo que acabamos de decir, y puede abreviar en muchas ocasiones la determinacion del centro de gravedad, y de otros puntos.

Ya que la distancia del centro de gravedad es igual á la suma de los momentos partida por la suma de las masas; si el punto, la linea, ó el plano respecto del qual se consideran los momentos, pasare por el centro de gravedad, será entonces cero esta distancia, y será tambien cero la suma de los momentos. Luego en general, *la suma de los momentos respecto de un plano qualquiera, que pasa por el centro de gravedad, es cero.*

Has-

118 Hasta aquí hemos considerado los cuerpos como puntos; y hemos visto como se determina el centro comun de gravedad de todos ellos, qualquiera que sea su número. Como un cuerpo de un volumen, y figura qualquiera no es mas que un conjunto de una infinidad de otros cuerpos, ó partes materiales, que podemos considerar como otros tantos puntos, por el mismo método podrémos determinar el centro de gravedad de un cuerpo sea la que fuere su figura, conforme lo manifestaremos muy en breve.

Y como el centro de gravedad no se distingue del punto por donde pasa la fuerza derivada de todos los conatos particulares con que las partes de un cuerpo procuran seguir el impulso de la gravedad; y por otra parte dicha derivada es igual á la suma de todos los conatos particulares, inferiremos que siempre podremos concebir todo el peso de un cuerpo reconcentrado en su centro de gravedad, y que dicho peso produciria en dicho centro de gravedad el mismo efecto que puede producir en virtud de su actual distribucion entre todas las partes del cuerpo.

119 Luego quando se tratase de hallar el centro de gravedad de muchas masas de figura qualquiera; se empezará buscando el centro de gravedad de cada una de dichas masas, y se hallará facilmente por lo dicho. Despues se considerará el peso de cada una de dichas masas como reconcentrado en su centro de gravedad; se buscará el centro comun de gravedad, como si todos los cuerpos propuestos fuesen otros tantos puntos colocados donde cada

uno

uno tiene su centro particular de gravedad.

120 Luego quanto hemos declarado hasta ahora acerca del centro comun de gravedad de muchos cuerpos considerados como puntos, se aplica tambien á los cuerpos de qualquiera figura, tomando en la valuacion de los momentos, por distancia de cada cuerpo la distancia de su centro particular de gravedad.

121 Luego *si muchos cuerpos de figura qualquiera tuvieren sus centros particulares de gravedad en una misma linea recta, ó en un mismo plano; su centro comun de gravedad estará tambien en la misma linea recta, ó en el mismo plano. Esto se demuestra del mismo modo que lo probado antes* (109).

122 Se hace muchísimo uso de los centros de gravedad en la Mecánica; y por lo mismo es de suma importancia tener presentes los métodos que hemos dado para determinarlos. Suponen estos métodos, segun se echa de vér, que un systéma, ó un cuerpo considerado como un systema de otros cuerpos, se compone de partes aisladas, cada una de las quales se considera como reducida, ó reconcentrada en un solo y único punto, que es su centro de gravedad particular. Pero aunque son verdaderos y exactos en la especulacion los espresados métodos, no siempre dán en la práctica los resultados con igual precision; porque siendo por lo comun de tamaños sensibles las partes elementales del systema, no se puede suponer, hablando con rigor, que cada una de ellas esté reducida á un

pun-

punto. A mas de esto, suelen ser tan irregulares sus figuras, ó sus pesos quando no son homogeneas en toda su estension, que solo se pueden determinar sus centros de gravedad particulares á ojo, ó por aproximacion.

123 Son muchos los casos en que con el socorro de la Geometría se puede determinar exacta y sencillamente el centro de gravedad de un cuerpo. Esto se verifica en los cuerpos *homogeneos*; esto es, en aquellos que son en todas sus partes de una sola y misma materia, sin mezcla alguna, y cuya figura guarda una ley conocida de continuidad. Vamos á manifestarlo con algunos exemplos; pero primero hemos de hacer algunas prevenciones importantes.

124 Es notorio que la Geometría solo considera los volúmenes; por consiguiente no puede por sí sola determinar mas que el centro de volumen de un cuerpo de figura dada. Pero en los cuerpos homogeneos de que estamos hablando, podemos considerar como igualmente pesadas é iguales unas con otras todas las moléculas elementales. Será, pues, el centro de volumen el mismo que el centro de gravedad y de masa. Por consiguienre pueden la Geometría y la Mecánica auxiliarse mutuamente para determinarle.

125 Una vez hallado el centro de gravedad de un cuerpo homogeneo, se podrá concebir que toda la pesantez del cuerpo reside en dicho punto; pero para valuar la espresada fuerza, es preciso atender á la especie de materia de que el cuerpo se compone. Por egemplo, dos esferas,

la

la una de oro, y la otra de plata, de igual diámetro, no tienen un mismo peso; sus pesos son como 19 á 10, con muy corta diferencia. Es cierto, en general, que el peso de un cuerpo homogeneo es tanto mayor quanto mayor es su volumen, y quanto mas denso es, ó quantas mas partes pesadas contiene. Por consiguiente si llamamos G el volumen de dicho cuerpo, p su densidad, ó gravedad específica, esto es lo que pesa una de las partes iguales (como por egemplo un pie cúbico) en que podemos suponer que está dividido el volumen; el peso absoluto, ó total del cuerpo será $G \times p$. Aplicando esto á las dos esferas de antes, diremos que los volúmenes G son los mismos, y que las gravedades específicas son como 19 á 10, con corta diferencia. Esta prevencion se habrá de tener muy presente quando se hiciere uso de los centros de gravedad; ahora no llevamos otra mira que la de determinar este punto en alguno de los casos espresados (123). Fig.

126. Cuestion I. *Hallar el centro de gravedad de una linea recta, el de la area, ó del contorno de un paralelogramo, de un polygono regular, de un círculo, de un paralelipípedo, de un prisma de bases regulares, de un cilindro, de una esfera, &c.*

Ya hemos reparado (124) que el centro de gravedad de un cuerpo homogeneo es el mismo que el centro de volumen. Por consiguiente si suponemos una linea recta uniformemente pesada en toda su longitud, dicho centro comun estará en medio de ella; el de la area, ó con-

Fig. torno de un paralelogramo estará en el punto de interseccion de dos rectas tiradas por el medio de dos lados opuestos; el de un polygono regular, de un círculo, de un paralelipípedo, &c. estará en el centro mismo de figura. Aunque acerca de esto no puede haber la menor duda, vamos á probarlo respecto de la linea recta, y de la area de un paralelogramo; y la misma demostracion se podrá aplicar á los demas casos.

30. 127 Sea, pues, la recta *AB*; la supondremos dividida en una infinidad de partes como *Pp*; multiplicarémos cada una de ellas por su distancia á un punto fijo, pongo por caso por la distancia á que está del punto *A*; tomaremos la suma de estos productos, y la dividiremos por la suma de las partes *Pp*, ó por toda la linea *AB*. Llamemos, pues, *AB*, a; *AP*, x; será $Pp = dx$; el momento de *Pp* será xdx, é integrándole sacaremos $\frac{x^2}{2}$ que será la suma de los momentos. Para sacarla respecto de toda la linea, hemos de suponer $x = a$; será, pues, $\frac{a^2}{2}$ la suma total de los momentos; y dividiéndola por la suma a de las masas, saldrá el cociente $\frac{a}{2}$, que espresará la distancia á que está del punto *A* el centro de gravedad de la linea *AB*. Por consiguiente el centro de gravedad de una linea recta uniformemente pesada está en su punto del medio.

128 Para hallar el centro de gravedad del paralelo-
31. gramo *ABDE*, imaginaremos que su superficie se compone de una infinidad de lineas, ó elementos uniformemente pesados, paralelos á los lados *AB*, *ED*. Es evidente, que

que por tener cada elemento su centro de gravedad en su Fig.
punto del medio, si colgamos el paralelogramo de un cordon *KG* que divide por medio en los puntos *F*, *G* los lados *AB*, *ED*, el paralelogramo se estará inmobil. Si imaginamos tambien que la superficie del paralelogramo se compone de una infinidad de elementos paralelos á *AE* y *BD*, y le colgamos del cordon *OI*, que parte por medio los lados *AE*, *BD*, tambien se mantendrá inmobil. Luego el punto *C*, que es la interseccion de las dos rectas *KG*, *OI*, será el centro de gravedad del paralelogramo.

129 Cuestion II. *Hallar el centro de gravedad de un triángulo* ABC. 32.

Desde los ángulos *A* y *B* tírense á los puntos medios *D* y *E* de los lados opuestos *BC*, *AC* las rectas *AD*, *BE* que se corten en *G*; será el punto *G* el centro de gravedad del triángulo.

Porque si consideramos la area del triángulo como formada de una infinidad de elementos paralelos á *BC*, todos estos elementos tendrán sus centros de gravedad particulares en la recta *AD*. Luego si colgáramos el triángulo del punto *K* en la direccion *KAD*, se mantendria inmobil. Por la misma razon si considerásemos la area del triángulo como formada de una infinidad de elementos paralelos á *AC*, y colgáramos la figura en la direccion *OBE* haciéndola vertical, se mantendria tambien inmobil. Luego su centro de gravedad estará en *G*, que es el punto de in-

Fig. terseccion de las dos rectas *KAD*, *OBE*.

130 Si tiramos la recta *DE*, será paralela á *AB*,
32. una vez que los lados *CB*, *CA* están cortados proporcionalmente en *D* y *E*. Luego los dos triángulos *CDE*, *CBA* son semejantes, y lo son tambien los dos triángulos *DGE*, *AGB*. Tendremos, pues, esta serie de razones iguales $CD : CB :: DE : AB :: DG : AG$. Pero $CD = \frac{CB}{2}$; luego $DG = \frac{AG}{2}$, y $DG = \frac{AD}{3}$, $AG = \frac{2}{3}AD$. Luego *el centro de gravedad de un triángulo está al tercio de la recta tirada desde un ángulo al medio del lado opuesto, contando desde dicho lado, ó á los dos tercios contando desde el vértice.*

131 Por medio del centro de gravedad del triángulo se puede determinar el de un polygono qualquiera
33. *ABCDE*. Tiraremos con este fin las diagonales *AC*, *AD*, y á los puntos *F*, *H*, *Q*, que están respectivamente en medio de los lados *BC*, *CD*, *DE*, las rectas *AF*, *AH*, *AQ*; tomaremos $AO = \frac{2}{3}AF$, $AI = \frac{2}{3}AH$, $AN = \frac{2}{3}AQ$; los puntos *O*, *I*, *N* serán los centros de gravedad de los triángulos *ABC*, *ACD*, *ADE*. Si tiramos la linea *OI*, el centro de gravedad del quadrilátero *ABCD* estará en dicha linea. Para averiguar en qué punto *K* está, haremos esta proporcion (86) el quadrilátero *ABCD* es al triángulo $ACD :: OI : OK$. Desde el punto *K* tiraremos al centro de gravedad *N* del triángulo *ADE* la recta *KN*, y la partiremos en *G* de modo que tengamos esta proporcion, el pentágono *ABCDE* es al triángulo $ADE :: KN : KG$;

KG; el punto *G* será el centro de gravedad del pentágono. Fig.

132 Una vez hallados los centros de gravedad *O*, *I*, *N* de los triángulos *ABC*, *ACD*, *ADE*; se puede determinar aun con mas brevedad por medio de los momentos el centro de gravedad del pentágono. Para este fin tiraremos á arbitrio en el plano del polygono los dos eges *SV*, *ST*, el 34.
uno vertical, y el otro orizontal. Desde los puntos *O*, *I*, *N*, *G* tiraremos perpendicularmente á los dos eges las rectas Oo, Oo'; Ii, Ii'; Nn, Nn'; Gg, Gg'. Tendremos (108) estas equaciones.

$$Gg = \frac{ABC \times Oo + ACD \times Ii + ADE \times Nn}{ABCDE}$$

$$Gg' = \frac{ABC \times Oo' + ACD \times Ii' + ADE \times Nn'}{ABCDE}.$$

Y como todas las partes de que se componen los segundos miembros de las dos últimas equaciones son conocidas, ó fáciles de valuar, serán tambien conocidas Gg y Gg'. Si tomamos en la *ST* la parte $Sg = Gg'$, y tiramos por el punto *g* la recta *gG* paralela á *SV*, é igual al valor hallado de Gg, será el punto *G* el centro de gravedad del polygono.

133 Cuestion III. ***Hallar el centro de gravedad del perímetro de un triángulo, ó de un polygono qualquiera.***

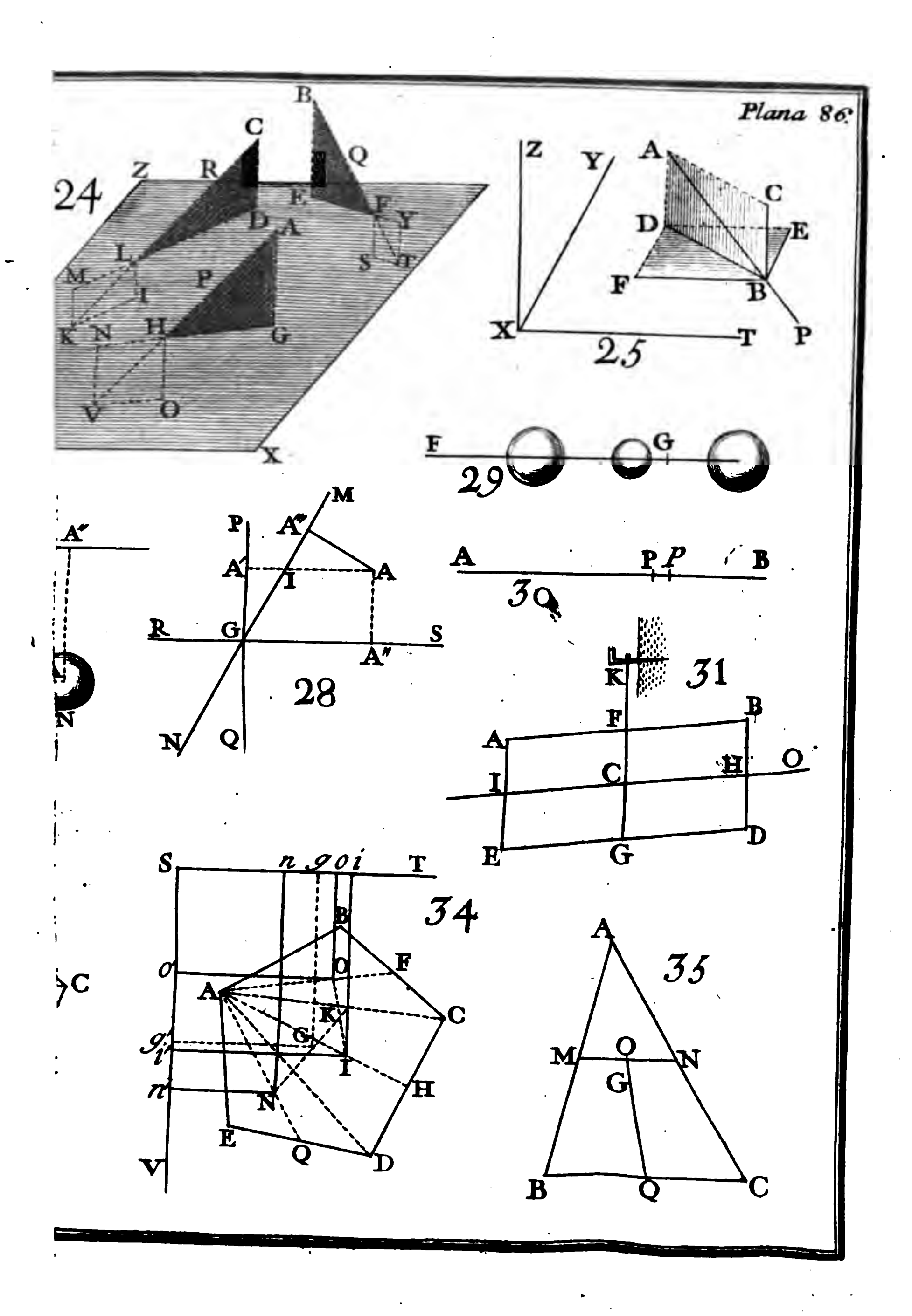
Por los mismos métodos hallarémos el centro de gravedad del perímetro de un triángulo, ó polygono qualquiera, pongo por caso del triángulo *ABC*. Tiraremos una 35.
linea recta desde *M*, que está en medio de *AB*, al punto *N*,

Fig. que está en medio de AC; dividirémos dicha recta en O, de modo que sea $AB + AC : AC :: MN : MO$, será el punto O el centro de gravedad del systema de las dos rectas AB, AC. Tírese desde el punto O al punto Q, que está en medio de BC, la recta OQ, y divídase en G de modo que sea $AB + AC + BC : BC :: OQ : OG$; estará en G el centro de gravedad de las tres rectas AB, AC, BC, ó del perímetro del triángulo ABC. Lo mismo hubiéramos hallado por medio de los momentos discurriendo del mismo modo que en el egemplo antecedente.

Por la resolucion de la última cuestion se echa de ver que el centro de gravedad del perímetro del triángulo ABC está fuera del espresado perímetro. En los casos parecidos á este, quiero decir, quando el centro de gravedad de un cuerpo está fuera de dicho cuerpo, es preciso figurarse que el centro está afianzado firmemente con el cuerpo por medio de varillas sin pesantez.

134 Cuestion IV. *Hallar el centro de gravedad de una pirámide.*

36. Supongamos primero que la pirámide $SABC$, cuyo centro de gravedad se pide, sea triangular. Desde los ángulos A y S tírense al punto D, que está en medio del lado BC, las rectas AD, SD; y despues de hecha $DE = \frac{DA}{3}$, $DF = \frac{DS}{3}$, tírense las rectas SE, AF, que se cortarán indispensablemente en G, pues están en el mismo plano ASD. El punto E es el centro de gravedad del triángulo ABC, y el punto F es el del triángulo SBC. Luego


24
25
28
29
30
31
34
35

go si consideramos la pirámide como formada de una infinidad de triángulos paralelos á *ABC*, y consideramos que siendo semejantes todos estos triángulos á *ABC*, la recta *SE* pasa indispensablemente por sus centros de gravedad particulares; se echará de vér que si la pirámide estuviera colgada del punto *K* en la direccion *KSE* se mantendria inmobil. Por la misma razon, si concebimos la pirámide como formada de elementos paralelos al triángulo *SBC*, y la suponemos colgada del punto *O* en la direccion *OAF*, hecha vertical, tambien se mantendrá inmobil. Luego estará en *G* su centro de gravedad. Fig.

135 Si tiramos ahora la recta *EF*, será paralela á *AS* por estar cortadas proporcionalmente en *E* y *F* las rectas *DA*, *DS*. Luego los dos triángulos *DEF*, *DAS* son semejantes, y lo serán tambien los dos triángulos *EGF*, *SGA*. Tendremos, pues, esta serie de razones iguales $DE : DA :: EF : AS :: EG : GS$. Pero $DE = \frac{DA}{3}$; luego $EG = \frac{SG}{3} = \frac{SE}{4}$, y $SG = \frac{3}{4}SE$. Por consiguiente *el centro de gravedad de una pirámide triangular está á los tres quartos de la linea tirada desde su vértice al centro de gravedad de su base, contando desde el vértice, ó á la quarta parte de la misma linea contando desde la base.*

136 Sea ahora una pirámide qualquiera *SABCDE*. 37.
Dividamos su base en triángulos con tirar las diagonales *AD*, *AC*; é imaginemos que estos triángulos son las bases de otras tantas pirámides triangulares. Desde el vértice *S* al centro de gravedad *F* del triángulo *AED*, y al centro

Fig. de gravedad *Q* de todo el polygono *ABCDE*, tírense las rectas *SF*, *SQ*. Divídase la recta *SF* en *f*, de modo que $Sf = \frac{3}{4}SF$; el punto *f* será el centro de gravedad de la pirámide triángular *SEAD*; y si por dicho punto pasare el plano *abcde*, paralelo á la base *ABCDE*, este plano dividirá proporcionalmente á *SF* y *Sf* todas las lineas que se tiraren desde el vértice de la pirámide á su base; luego los centros de gravedad de todas las pirámides triangulares de que se compone la pirámide polygona, y por consiguiente el centro de gravedad de esta última pirámide estarán en dicho plano. Pero si consideramos la misma pirámide como formada de una infinidad de elementos paralelos á su base *ABCDE*, y concebimos que todos estos elementos son semejantes á *ABCDE*, es evidente que la recta *SQ* pasa por sus centros de gravedad particulares, y que por consiguiente en él está el centro de gravedad de toda la pirámide. Luego está dicho centro en el punto de interseccion *G* de la recta *SQ* con el plano *abcde*. Pero la recta *SQ* está dividida en *G* de modo que $SG = \frac{3}{4}SQ$. Por consiguiente *el centro de gravedad de qualquiera pirámide está á los tres quartos de la linea tirada desde su vértice al centro de gravedad de su base, contando desde el vértice, ó al quarto de la misma linea contando desde la base.*

137 Como un cono es lo mismo que una pirámide cuya base es un polygono de una infinidad de lados, tendrá su centro de gravedad á los tres quartos de la linea ti-

tirada desde su vértice al centro del círculo que le sirve Fig.
de base, contando desde el vértice, ó á la quarta parte de la misma linea contando desde la base.

138 Busquemos el centro de gravedad r de un trozo *ABCDEMHIKL* de pirámide ó cono, cuyas bases sean paralelas.

Sea *SABCDE* la pirámide entera, cuya parte es el 38.
trozo; *SHIKLM* la pirámide quitada, y tiremos desde el vértice S al centro de gravedad Q de la base *ABCDE* la recta SQ, que pasa indispensablemente por el centro de gravedad q del polygono *HIKLM* semejante á *ABCDE*; se echa de ver que suponiendo el trozo colgado en la direccion SQ, se mantendrá inmobil, y que por consiguiente su centro de gravedad r está en la recta SQ. Como sería trabajoso hallar otra suspension de equilibrio por un método directo, nos valdremos de las propiedades de los momentos para concluir la resolucion, esto es, para determinar en la recta SQ el punto r donde está el centro de gravedad que se pide. Llamemos S la solidez de toda la pirámide, s la de la pirámide quitada, y por consiguiente $S - s$ será la solidez del trozo. Si consideramos los momentos de los tres sólidos S, s, $S - s$ respecto del vértice S, tendrémos (108) $S \times \frac{3}{4}SQ = s \times \frac{3}{4}Sq +$ $(S - s) \times Sr$, ó $S \times \frac{3}{4}SQ - s \times \frac{3}{4}Sq = (S - s) \times Sr$; y por consiguiente $Sr = \frac{S \times \frac{3}{4}SQ - s \times \frac{3}{4}Sq}{S - s}$, y como todas las cantidades S, s, SQ, Sq son conocidas,

ó

Fig. ó fáciles de valuar, conoceremos $Sr.$

139 Cuestion V. *Hallar el centro de gravedad* G *de un arco de círculo* AOB.

39. Por de contado sabemos que el centro de gravedad que se pide ha de estar en el radio CO que divide en dos partes iguales el arco AOB. Determinemos, pues, en qué punto está del mismo radio.

Imaginaremos que el arco AOB se compone de una infinidad de partes mn, que podemos considerar como líneas rectas muy pequeñas, y consideremos sus momentos respecto del diámetro HK paralelo á la cuerda AB. La suma de todos estos momentos será igual al momento del systema, esto es á $AOB \times CG$. Sea q el medio, ó centro de gravedad de mn. Desde los puntos A, B, m, n, q bágense las perpendiculares AV, BZ, mx, ny, qz á HK; tírense mr paralela á la misma linea HK, y el radio Cq. Los dos triángulos nrm, Cqz, cuyos lados son perpendiculares cada uno al suyo, son semejantes, y dán $mn : mr$ ó $xy :: Cq$ ó $CO : qz$. Luego $mn \times qz = xy \times CO$. Lo propio sacaremos respecto de todos los demás elementos del arco AOB. De donde se infiere que la suma de todos los momentos $mn \times qz$ es igual al producto de la linea VZ ó AB multiplicada por CO. Tenemos, pues, tambien $AOB \times CG = AB \times CO$, y por consiguiente $GC = \frac{AB \times CO}{AOB}$. Luego *la distancia que hay desde el centro de gravedad de un arco de círculo al centro del mismo círculo es igual al cociente del producto de la cuerda por el radio dividido por el arco.*

Cues-

140 Cuestion VI. *Hallar el centro de gravedad del sector de círculo* ACBO. Fig.

Como el centro de gravedad *G* ha de estar en el radio *CO* que divide el sector en dos partes iguales; solo falta determinar en qual de los puntos de dicho radio ha de estar. Para esto imaginarèmos que el sector *ACBO* se compone de una infinidad de triángulos *Cmn*. Sea *q* el medio de la base *mn*, y tírese el radio *Cq*. Tómese en este radio la parte $Ct = \frac{2}{3}Cq$; el punto *t* será el centro de gravedad del triángulo elemental *Cmn*. Desde los puntos *A*, *B*, *m*, *n*, *q*, *t* tírense al diámetro *HK*, que supondremos paralelo á la cuerda *AB*, las perpendiculares *AV*, *BZ*, *mx*, *ny*, *qz*, *tu*; y tírese la *mr* paralela á la misma cuerda. La espresion del momento del triángulo *Cmn* respecto de *HK* será $\frac{mn \times Cq}{2} \times tu$, ó (con observar que $tu = \frac{2}{3}qz$, y substituyendo *CO* en lugar de *Cq*) $\frac{mn \times CO}{2} \times \frac{2}{3}qz$. Pero por ser semejantes los triángulos *nrm*, *Cqz* tenemos $mn \times qz = xy \times CO$. Luego la espresion de dicho momento será $\frac{(CO)^2}{2} \times \frac{2}{3}xy$. Luego la suma de los momentos de todos los triángulos elementales de que se compone todo el sector *ACBO*, es $\frac{(CO)^2}{2} \times \frac{2}{3}VZ$, ó $\frac{(CO)^2 \times AB}{3}$. Pero está suma es igual á $ACBO \times CG$ (108), ó á $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG$. Luego será $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG = \frac{(CO)^2 \times AB}{3}$; de donde sacaremos $CG = \frac{2CO \times AB}{3AOB}$. Por consiguiente sabemos en qué punto del radio *CO* está el punto *G*. 40.

Una vez que hemos declarado como se halla el centro de gravedad del sector *ACBO*, y el (130) del trián-

Fig. triángulo *ACB*, será facil determinar el del segmento *ABO*, considerando que el momento del segmento respecto del centro es igual á la diferencia de los momentos del sector, y del triángulo.

141 De lo dicho (107) se saca un método para determinar en la práctica el centro de gravedad de un cuerpo, sea la que fuere su figura: se colgará el cuerpo propuesto de un cordon atándole succesivamente en dos puntos distintos; se prolongarán con el pensamiento las dos direcciones del cordon dentro del cuerpo, el punto donde se encontraren será el centro de gravedad.

Si fuere tan grande el cuerpo propuesto, que no se le pueda colgar conforme hemos dicho, se hará otro mas chico que le sea semejante, y se determinará el centro de gravedad de este por el método declarado. Este centro de gravedad dará á conocer proporcionalmente la posicion del centro de gravedad del cuerpo grande.

142 En las cuestiones que acabamos de resolver se echa de ver que respecto de cada una hay que vencer una dificultad particular que en algunos casos puede ser muy grande. Esto nos mueve á dar los métodos generales siguientes.

143 Cuestion VII. *Hallar las fórmulas para determinar el centro de gravedad de un arco* AM *de una curva qualquiera.*

41. Imaginaremos el arco infinitamente pequeño *Mm*, y tomaremos por ege de los momentos una linea qualquiera

AH

AH paralela á las ordenadas que suponemos paralelas entre sí; para determinar la distancia *QG* del centro de gravedad al ege *AH*, hemos de tomar la suma de los momentos de los arcos *Mm* respecto del ege *AH*, y dividirla por la suma de los arcos *Mm*, esto es por el arco *AM*. Pero como el arco *Mm* es infinitamente pequeño, la distancia que hay desde su punto medio *n* á la recta *AH* es la misma que *MH*. Será, pues, $Mm \times MH$ el momento de este arco pequeño. Por consiguiente si llamamos *AP* ó *HM*, *x*; *PM*, *y*; el arco *AM*, *u*, será $Mm = du$; luego *xdu* será el momento de dicho arco *Mm*, y *S. xdu* será la suma de los momentos de todos los arcos infinitamente pequeños *Mm* que componen el arco *AM*. Será, pues, $QG = \frac{S.xdu}{S.du}$. Discurriendo del mismo modo hallaríamos que la distancia *OG* á que está el centro de gravedad del ege *AP* es $\frac{S.ydu}{S.du}$. Fig.

144 Si el arco cuyo centro de gravedad se busca se compone de dos partes iguales, y semejantes *AM*, *AM'*, 42. puestas al uno y otro lado del ege de las abscisas, es constante que en este caso el centro de gravedad *G* estará en la recta *AC*, y solo faltará determinar la distancia á que estará del punto *C*. Pero como los momentos de los arcos *Mm*, *M'm'* respecto del ege *NN'* son iguales, la distancia *CG* será $2\frac{S.xdu}{S.du}$.

145 Si quisiéramos hallar, por egemplo, el centro 42. de gravedad del arco de círculo *MAM'*, consideraríamos que dicho centro ha de estar en algun punto del radio *CA* que divide en dos partes iguales el arco propuesto. Llamaría-

Fig. ríamos CA, a; CP, x; PM, y; AM, u. En estos supuestos será $2xdu$ la espresion de los momentos de los arcos Mm, $M'm'$ respecto de la recta NN'; y como por lo dicho (III. 350) $du = \frac{ady}{x}$, ó $2xdu = 2ady$, será $\frac{ay}{u}$ la distancia que buscamos. Quiero decir que $x = \frac{ay}{u} = \frac{a \times 2y}{2u}$. Esta espresion nos está diciendo que la distancia del centro de gravedad de un arco de círculo al centro del círculo, es igual al cociente del producto de la cuerda, y del radio dividido por el arco. Esto mismo hallamos antes (139).

146 Cuestion VIII. *Hallar una fórmula general para determinar el centro de gravedad de una superficie curvilinea qualquiera* APM.

41. Suponiendo que dicho centro está en G, para hallar la distancia QG será menester tomar la suma de los momentos de los pequeños trapecios $MPpm$ respecto del ege AH, y dividirla por la suma de los mismos trapecios; esto es, por el espacio APM. Pero el centro de gravedad de este pequeño trapecio ha de estar en medio de la recta nk que dista igualmente de MP que de mp, y por ser infinitamente pequeña la altura Pp, podemos suponer que el medio de nk es el medio de MP; por consiguiente el momento de $PpmM$ será $PpmM \times AP$, esto es $xydx$. Luego la suma de los momentos será $S.xydx$, y la distancia QG será $S. \frac{xydx}{APM}$. El momento del espresado trapecio respecto de AP, sería $\frac{S.yydx}{2APM} = GO$; y como $APM = S.ydx$; sacaremos $QG = \frac{S.xydx}{S.ydx}$, $OG = \frac{S.yydx}{2S.ydx}$.

147 Supongamos, por egemplo, que sea AM una pa-

parábola. De la equacion $yy = px$ de la curva ; sacarémos Fig.
$dx = \frac{2ydy}{p}$, $S.ydx = S.\frac{2yydy}{p} = \frac{2y^3}{3p}$, $S.\frac{yydx}{2} = \frac{S.y^3dy}{p} = \frac{y^4}{4p}$, $S.xydx = S.\frac{2y^4dy}{pp} = \frac{2y^3}{5p^2}$. Luego $GO = \frac{3}{8}y$, $GQ = \frac{3yy}{5p} = \frac{3}{5}x$.

148 Cuestion IX. *Sacar la fórmula general para hallar el centro de gravedad de las superficies engendradas por la revolucion de una curva qualquiera* AM *al rededor de* AP.

Es constante que el centro de gravedad de cada zona elemental está en el ege de revolucion PA, y hemos de suponer que el centro de la zona elemental trazada por Mm, está en el centro P de la una de las bases de dicha zona, considerada como infinitamente delgada. Pero hemos probado (III. 619) que siendo π la razon entre la circunferencia y el radio, el valor de dicha faja es πydu ; será, pues, el momento de dicha zona respecto del punto $A = \pi xydu$, en el supuesto de ser AP, x ; y la distancia AG de su centro de gravedad al punto A será $\frac{S.\pi xydu}{S.\pi ydu} = \frac{S.xydu}{S.ydu}$. 43.

149 Supongamos que siendo AN un arco de círculo queramos hallar el centro de gravedad de la faja esférica AMM', siendo el radio a, la abscisa AP, x, y la ordenada PM, y. En estos supuestos será $y = \sqrt{(2ax - xx)}$; $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (III. 350) ; $S.ydu = ax$; $S.xydu = \frac{ax^2}{2}$; luego $\frac{S.xydu}{S.ydu} = \frac{x}{2}$, y por consiguiente el centro de gravedad de la zona está en medio de su altura.

Lo

Fig. Lo mismo probarémos respecto de la zona $MNN'M'$, para cuyo fin contarémos las abscisas desde el centro C, y será ahora $CP = x$, las demas cantidades son las mismas que antes, y practicando las substituciones correspondientes saldrá tambien $\frac{S.xydu}{S.ydu} = \frac{x}{2}$; esto es, que el centro de gravedad de la zona $MNN'M'$ está en medio de su altura.

Bien se echa de ver que la distancia del centro de gravedad al centro de la esfera ha de crecer la mitad de la altura que se añade á la faja ó zona, y esto no puede verificarse á no ser que el centro de gravedad de una faja ó zona qualquiera esté en medio de dicha zona. Porque si
43. Cp fuese por egemplo $= 1$ pie, la distancia del centro de gravedad de la faja $mNN'm'$ respecto del centro será $= \frac{1}{2}$ pie. Si se añadiere otra faja cuya altura Pp sea $= 1$ pie, la distancia del centro de gravedad de la zona total será ahora $= 1$ pie; luego el centro de gravedad de la zona añadida estaba en medio de la misma zona, una vez que el centro de gravedad de las dos juntas está en el punto donde se juntan una con otra.

150 Cuestion X. *Hallar la fórmula general para determinar el centro de gravedad de los sólidos de revolucion.*

41. Supongamos, por egemplo, que queramos determinar el centro de gravedad del sólido engendrado por la area APM, dando la vuelta al rededor de AP.

Se viene á los ojos que el centro de gravedad está en el ege AP. El cilindro elemental que resulta de la revolucion del pequeño trapecio $PMmp$ tiene su centro de gra-

ve-

vedad en *P*. Y como el valor de este cilindro es $\frac{\pi y^2 dx}{s}$, Fig.
su momento respecto del punto *A* será $\frac{\pi y^2 x dx}{s}$; si llamamos *G* la distancia que hay desde el punto *A* al centro de gravedad del sólido finito engendrado por *APM*, será $G = \frac{S.xy^2dx}{S.y^2dx}$.

151 Si fuese *APM* un segmento de círculo, cuyo radio $= a$, será $S.y^2dx = S.dx(2ax - xx) = ax^2 - \frac{x^3}{3}$, $S.xy^2dx = S.xdx(2ax - xx) = \frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}$. Luego $G = \frac{8ax - 3x^2}{4(3a - x)}$.

Para averiguar donde está el centro de gravedad del paraboloide engendrado por la parábola vulgar *ABD*, dando la vuelta al rededor del ege *AP*, respecto del vértice *A*; de la equacion $ax = yy$ de la curva, en el supuesto de ser *a* su parámetro, sacaríamos $\frac{S.xy^2dx}{S.y^2dx} = \frac{S.axxdx}{S.axdx} = \frac{2}{3}x$. 44.

152 Supongamos que la curva *BAD* es una porcion de elipse ¿donde estará el centro de gravedad del sólido que engendra el plano de la curva, dando la vuelta al rededor del exe *AP*?

Si llamamos *p* el parámetro de la curva: *a*, el exe mayor; *x*, la abscisa *AP*; *y*, la ordenada *PM*, tendremos por lo dicho (III. 216) $y^2 = \frac{p}{a}(ax - xx)$; y por otra parte es patente que el centro de gravedad está en el ege de la curva. Llamemos *AF*, *r*, y *c* la circunferencia, cuyo radio es *AF*, la circunferencia del radio *y* será $= \frac{cy}{r}$, y la superficie del círculo de esta circunferencia será $\frac{cy^2}{2r}$. El producto de esta superficie por *dx*, será el elemento del

Fig. sólido engendrado por la superficie *APM*, cuyo elemento $= \frac{cy^2dx}{2r} = \frac{cp}{2ra} \times (axdx - x^2dx)$ con substituir el valor de y^2; el momento de este elemento respecto de la linea *Tn*, será $\frac{cp}{2ra} \times (ax^2dx - x^3dx)$, será, pues, $S.xy^2dx = \frac{cp}{2ra} \times (\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4})$, y $S.y^2dx = \frac{cp}{2ra} \times (\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3})$, y la distancia que se busca será $\frac{\frac{a}{3}x - \frac{x^2}{4}}{\frac{a}{2} - \frac{x}{3}} = \frac{\frac{4ax - 3x^2}{12}}{\frac{3a - 2x}{6}} = \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$.

153 Si hacemos $x = \frac{1}{2}a$, la distancia que acabamos de determinar será $= \frac{\frac{5}{4}a^2}{4a} = \frac{5}{16}a$. Si $x = a$, la misma distancia será $= \frac{aa}{2a} = \frac{1}{2}a$. Esto quiere decir que la distancia del centro de gravedad de un semiconoide elipsoide engendrado de la elipse dando la vuelta al rededor de su ege mayor respecto del vértice *A*, está á los $\frac{5}{16}$ de dicho ege, y la distancia del centro de gravedad de todo el conoide, está en medio del ege.

154 Si la curva *BAD* fuese un arco de círculo, ¿á qué distancia estará respecto de la *Tn* el centro de gravedad del sólido de revolucion al rededor de *AP*?

Si hacemos el parámetro $p = a$, la equacion de la elipse se transformará en $y^2 = ax - xx$, que es la equacion del círculo. Luego el elemento $\frac{cp}{2ra}(axdx - x^2dx)$, sacado antes (153), será $\frac{c}{2r}(adx - x^2dx)$, cuyo momento será $\frac{c}{2r}(ax^2dx - x^3dx)$, y dividiendo la suma de los momentos por la de los elementos, sacarémos que la distancia propuesta $= \frac{4ax - 3x^2}{6a - 4x}$. Si hacemos $x = \frac{1}{2}a$, dicha distancia será $\frac{5}{16}a$, y si $x = a$ dicha distancia será

$= \frac{1}{2}a$. Luego si una esfera y un esferoide elíptico tuvieren un mismo ege, el emisferio y el semiconoide elíptico; la esfera y el esferoide elíptico tendrán su centro de gravedad en un mismo punto. Fig.

155 Si la curva *BAD* fuere una hipérbola, cuyo ege sea *AF*, ¿á qué distancia de la *Tn* estará el centro de gravedad del sólido engendrado de la revolucion del plano *APM* al rededor del ege *AF*?

Por lo dicho (III. 116) la equacion de la hipérbola es $y^2 = \frac{p}{a}(ax + xx)$; el elemento del sólido de revolucion será $\frac{cp}{2ra}(axdx + xxdx)$, suponemos que sea *AF* la prolongacion del primer ege de la hipérbola. El momento del elemento hallado será $= \frac{cp}{2ra}(ax^2dx + x^3dx)$. Luego dividiendo la suma de los momentos por la suma de las masas, sacarémos que la distancia propuesta $= \frac{4ax + 3x^2}{6a + 4x}$. Si $x = a$, la expresion se deduce $\frac{7aa}{10a} = \frac{7}{10}a$.

Propiedades de los centros de Gravedad.

156 De lo que hemos probado acerca de los centros de gravedad y de la derivada de muchas fuerzas paralelas se infiere que si todas las partes de un cuerpo ó systema qualquiera de cuerpos se mueven, ó hacen fuerza para moverse con una misma velocidad, la resultante de todos estos movimientos pasa por el centro de gravedad de dicho cuerpo ó systema de cuerpos, y que por consiguiente el systema se mueve ó intenta moverse como si el total de las masas estuviera reconcentrado en el centro de gra-

 ve-

Fig. vedad, y tuviera una velocidad igual á la que tiene cada una de las partes.

157 Luego recíprocamente, si le aplicamos al centro de gravedad de un cuerpo, ó systema de cuerpos una fuerza qualquiera; el movimiento se repartirá igualmente entre todas las partes iguales del systema, caminarán todas con una velocidad igual, cuyo valor conoceremos (24) dividiendo la cantidad de movimiento comunicada á dicho centro, por toda la masa del cuerpo ó del systema de cuerpos.

158 Y como muchas fuerzas aplicadas á un mismo punto se reducen por los principios sentados á una sola, inferiremos generalmente que *qualesquiera fuerzas que se apliquen al centro de gravedad de un cuerpo ó systema de cuerpos, sean los que fueren el número, y las direcciones de dichas fuerzas; todas las partes del expresado cuerpo ó systema adquirirán una velocidad igual cuya direccion será la misma que la de la derivada de todas dichas fuerzas, y será igual á la cantidad de movimiento que representa dicha fuerza resultante, dividida por el total de la masa del cuerpo ó del systema de cuerpos.*

159 De donde se sigue que siempre *que las fuerzas que obran en un cuerpo se redugeren ó pudieren reducir á una sola cuya direccion pase por el centro de gravedad, el cuerpo no dará vueltas ó no girará al rededor de su centro de gravedad.*

160 Pero si las fuerzas que obran en un cuerpo no se

se pudiesen reducir á una sola; ó si aunque se puedan reducir á una sola, la direccion de esta no pasare por el centro de gravedad, no se moverán entonces todas las partes del systema con un movimiento comun. No obstante, el centro de gravedad se moverá del mismo modo que si todas dichas fuerzas obrasen inmediatamente en él. Probémoslo. Fig.

161 Supongamos primero que tres cuerpos *M*, *N*, *P* se mueven por lineas paralelas *AD*, *BE*, *CF*, estén ó no en un mismo plano, cuyas velocidades sean las lineas *AD*, *BE*, *CF*. Supongamos que sea *G* el centro de gravedad de dichos cuerpos quando están en *A*, *B*, *C*, y G' su centro de gravedad quando han llegado á *D*, *E*, *F* donde llegan á un mismo tiempo, pues *AD*, *BE*, *CF* representan sus velocidades. Si tiramos la linea GG', será paralela á dichas lineas; será la direccion que seguirá el centro de gravedad *G* mientras durare el movimiento de los cuerpos; y dicho centro de gravedad la andará uniformemente. 45.

1.° Es facil percibir que la direccion que seguirá el centro de gravedad, será paralela á las lineas *AD*, *BE*, &c. porque en qualquier lugar que le supongamos en un instante qualquiera, si concebimos un plano que pase por dicho centro, la suma de los momentos respecto de dicho plano, ha de ser cero (117). Pero si concebimos un plano paralelo á las direcciones de los cuerpos, y que pase por el centro *G*, los momentos respecto de este plano, no pueden menos de ser cero mientras durare el movimiento; porque suponemos que los cuerpos mientras

Fig. se mueven no se apartan de dicho plano; son, pues, siempre unas mismas las distancias á que están del plano; luego son tambien siempre los mismos los momentos; y como al principio del movimiento, esto es, quando el centro de gravedad estaba en *G*, su suma era cero; será tambien cero en qualquiera punto de sus direcciones que los cuerpos estén; luego el centro de gravedad siempre está en un plano paralelo á las direcciones de los cuerpos, que pasa por la primera posicion *G* del mismo centro. Y como en todo lo que acabamos de decir no hay mas circunstancia que determine la posicion de dicho plano, sino que ha de ser paralelo á las direcciones de los cuerpos *M*, *N*, *P*, y pasar por el punto *G*; del mismo modo probaríamos que dicho centro está en otro plano qualquiera paralelo á las direcciones de los cuerpos, y que pase por el punto *G*; está, pues, en la interseccion comun de dichos planos; luego el centro de gravedad se mueve en la direccion GG' paralela á las direcciones de los cuerpos.

2.° Tambien se mueve uniformemente: quiero decir, que si en llegando los cuerpos *M*, *N*, *P* &c. á *a*, *b*, *c* &c. suponemos que el centro de gravedad esté en *g*, tendremos $GG' : Gg :: AD : Aa :: BE : Bb ::$ &c. esto es, que los espacios andados en un mismo tiempo por el centro de gravedad, y por cada uno de los cuerpos, serán como sus velocidades.

Con efecto, si representa *RS* un plano al qual sean perpendiculares las direcciones de los movimientos; por la na-

naturaleza del centro de gravedad tendremos (108) Fig.
$M \times AH + N \times BI + P \times CL = (M + N + P) \times GK$. Y por la misma razon quando están en D, E, F, tendremos $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Si de esta equacion restamos la primera, y reparamos que $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$ &c. sacaremos $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Luego por la misma razon quando estuviesen en a, b, c tendremos $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$.

Pero una vez que los espacios Aa, Bb, Cc son andados uniformemente en un mismo tiempo, serán unos con otros dichos espacios (22) como las velocidades AD, BE, CF; será, pues, $AD : BE :: Aa : Bb$, $AD : CF :: Aa : Cc$; luego $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Substituyendo estos valores en la última equacion, y eliminando el denominador AD, se transformará en $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. Finalmente dividiendo esta equacion por la otra en que está GG', sacaremos $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG'}$, de donde se infiere $GG' : Gg :: AD : Aa$.

Es de reparar que de la equacion en que está GG' se saca $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Pero las lineas AD, BE, CF, GG' son las velocidades de los cuerpos M, N, P, y del centro de gravedad G; luego $M \times AD$, $N \times BE$ &c. son sus cantidades de movimiento. Por consiguiente una vez que la demostracion, que acabamos de dar, no pen-

Fig. de en manerá ninguna del número de los cuerpos, podemos inferir generalmente 1.° *que si tantos cuerpos como se quisieren andan uniformemente lineas paralelas, el centro de gravedad andará tambien uniformemente una linea paralela á las demás.* 2.° *que su velocidad es igual á la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos que se mueven ácia una direccion, menos la suma de las cantidades de movimiento de los que se mueven ácia una direccion contraria, dividiéndolo todo por la suma de las masas.*

162 Si algunos de los cuerpos estuvieran en reposo, como su velocidad sería cero, su cantidad de movimiento tambien sería cero. Por consiguiente se desaparecería del numerador de la fraccion, que espresa la velocidad del centro de gravedad. Pero esto no causa mudanza alguna en el denominador que siempre será la suma de todas las masas.

163 Si la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos que caminan ácia una direccion fuese igual á la suma de las cantidades de movimiento de los que caminan ácia una direccion contraria, el numerador de la fraccion que espresa el movimiento del centro de gravedad, sería cero. Luego dicho centro de gravedad estaría en reposo. Luego sean los que fueren los movimientos paralelos de muchos cuerpos, su centro comun de gravedad se mantiene en reposo, quando la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos que caminan ácia una direccion, es igual á la suma de las cantidades de movimiento de los

que

que caminan ácia una direccion opuesta. Fig.

164 Una vez que las cantidades de movimiento representan las fuerzas (24), y que la derivada de muchas fuerzas paralelas (102) es igual á la suma de las que obran, ó procuran obrar ácia una direccion menos la suma de las que obran, ó intentan obrar ácia una direccion contraria, resulta que *si muchas fuerzas paralelas obran en las diferentes partes de un systema qualquiera de cuerpos, el centro de gravedad de dicho systema se mueve como si dichas fuerzas obrára en él inmediatamente.*

165 Supongamos ahora que los cuerpos, sea el que fuere su número, se muevan por lineas rectas qualesquiera; si imaginamos dos lineas rectas qualesquiera perpendiculares una á otra, y en su punto de concurso otra tercera linea que sea perpendicular á su plano de ellas, podremos siempre resolver la velocidad de cada cuerpo, en otras tres paralelas á dichas tres lineas. Pero de lo que acabamos de probar se sigue, que el movimiento del centro de gravedad en virtud de los movimientos paralelos á una de dichas lineas, será paralelo á la misma linea, será uniforme, y que su velocidad será igual á la suma de las cantidades de movimiento * valuadas paralelamente á dicha li-

* Con la mira de abreviar decimos solamente la suma de las cantidades de movimiento: siempre se debe entender la suma de las cantidades de movimiento de los cuerpos que se mueven ácia una direccion, menos la suma de las cantidades de movimiento de los que caminan ácia una direccion contraria.

Fig. linea, dividida por la suma de las masas. Luego si concebimos que en virtud de este principio se haya determinado el movimiento del centro de gravedad paralelamente á cada una de dichas tres lineas, y que despues se compongan estos tres movimientos para reducirlos á uno solo (y esto es posible, pues están aplicados á un mismo punto) conoceremos el camino único del centro de gravedad. Y como los elementos de que aquí usamos, no se distinguen de las fuerzas mismas de los cuerpos, paralelamente á las tres lineas, y la fuerza única del centro de gravedad se halla en virtud de esto compuesta de las fuerzas resultantes paralelamente á cada una de dichas lineas, no puede menos de ser igual y paralela á la derivada de todas las fuerzas aplicadas á todos los cuerpos; luego en general *sean las que fueren las direcciones, y los valores de las fuerzas aplicadas á las diferentes partes de un systema de cuerpos, el centro de gravedad siempre se mueve, ó intenta moverse del mismo modo que si todas dichas fuerzas obrasen inmediatamente en él.*

166 Hemos dicho que siempre se podrá resolver la velocidad de cada cuerpo en otras tres paralelas á tres lineas dadas de posicion. No obstante, si la direccion de uno de los cuerpos fuese paralela al plano de dos de dichas tres lineas, parece que en el primer caso no se podrá resolver sino en dos fuerzas paralelas á dos de dichas tres lineas; y que en el segundo no se puede egecutar resolucion ninguna, en fuerzas que sean paralelas á las otras dos lineas.

neas. No por esto deja de ser general la proposicion sentada; porque se echa de ver, por egemplo, que como la linea *AB* no sea paralela á la una de las dos lineas *PR*, *PQ* siempre se puede resolver la fuerza que *AB* representa, en otras dos *AC*, *AD* paralelas á dichas dos lineas; pero al mismo tiempo se echa de ver que quanto mas se acercare *AB* á ser paralela á *PQ*, tanto mas menguará la fuerza *AD*; por manera que será cero, en llegando *AB* á ser paralela *PQ*. Luego tambien se puede suponer en este caso una resolucion en dos fuerzas, tales sin embargo que la una sea cero. Por la misma razon se puede tambien suponer en el mismo caso una resolucion en tres fuerzas paralelas á las tres lineas *PQ*, *PR*, *PS*, tales que dos de ellas sean cero. Fig. 46.

167 De lo que acabamos de decir, y de lo dicho (163) hemos de inferir que el centro de gravedad de un systema de cuerpos se estará en reposo, si despues de resueltas las fuerzas aplicadas á cada parte del systema en otras tres fuerzas paralelas á tres lineas perpendiculares entre sí, la suma de las fuerzas ó de las cantidades de movimiento paralelamente á cada una de dichas tres lineas fuese cero, tomando con signos contrarios las fuerzas que obraren ácia direcciones encontradas.

168 Quando todas estas fuerzas están en un mismo plano, es evidente que basta resolver cada fuerza en otras dos, paralelas á dos lineas perpendiculares una á otra, y tiradas en el mismo plano; porque como las fuerzas perpendi-

Fig. diculares al plano son entonces nulas, el movimiento del centro de gravedad en virtud de dichas fuerzas será tambien nulo.

169 En todo lo que acabamos de decir hemos supuesto que cada uno de los cuerpos que componen el systema, obedezca plena y libremente á la fuerza que le solicita. Pero lo mismo se verifica quando están impedidos sus movimientos, con tal que los obstáculos no procedan de una fuerza estraña al systema, esto es, con tal que no sean otros que los que resultan de la dificultad de seguir dichos movimientos, por el modo con que están colocados unos respecto de otros, ó atados unos con otros. Esto lo probaremos luego que hubiéremos declarado la ley general del equilibrio de los cuerpos, y la ley general de los movimientos.

Principio general del Equilibrio de los cuerpos.

170 *Sean las que fuesen las fuerzas, agentes ó resistentes, que se le apliquen á un cuerpo, á un systema de cuerpos, á una máquina, &c. y sean tambien las que fuesen sus direcciones; si imaginamos resuelta cada una de ellas en otras tres paralelas á tres lineas tiradas por un punto qualqüiera, y perpendiculares unas á otras; para que haya equilibrio entre todas estas fuerzas, es preciso que sea cero la suma* * *de las fuerzas que obran paralelamen-*

* Aqui y en adelante llamaremos siempre *suma de las fuerzas*, la suma de las que obran, ó procuran obrar ácia una direccion, menos la suma de las que obran ó procuran obrar ácia una direccion contraria.

mente á cada una de dichas tres lineas. Fig.

Con efecto, ya hemos visto (105) que sean las que fueren el número, y la naturaleza de las fuerzas, siempre se podian reducir todas ellas á tres, cuyas direcciones fuesen paralelas á tres lineas perpendiculares entre sí. Luego si suponemos que hay equilibrio entre todas las fuerzas del systema, deberá haber tambien por precision equilibrio entre estas tres derivadas, ó será cero cada una de ellas. Pero por ser dichas tres derivadas perpendiculares unas á otras, no pueden estorvarse, ni ayudarse, luego cada una de ellas debe ser cero. Y como cada una de ellas es igual (102) á la suma de las fuerzas parciales que la serian paralelas, han de ser con efecto cero las sumas de las fuerzas, que en virtud de la resolucion obran paralelamente á cada una de tres lineas perpendiculares entre sí.

171 Si todas las fuerzas tuvieran sus direcciones en un mismo plano, sería cero la suma de las fuerzas paralelas á cada una de dos lineas tiradas en el mismo plano perpendicularmente una á otra. Y si fueran paralelas unas á otras todas las fuerzas, sería menester que fuese cero la suma de todas estas fuerzas. Ambos casos están comprehendidos con evidencia en la proposicion general.

172 Es de reparar, que aunque siempre se verifique esta proposicion en todos los casos de equilibrio, no por esto la hemos de mirar como suficiente para que haya equilibrio. Las demás condiciones necesarias para el equilibrio varían segun las qualidades, ó las disposiciones parti-

Fig. ticulares de las partes del systema ó de la máquina que se considera, conforme lo probaremos á su tiempo.

173 Este principio es general, ora sean agentes todas las fuerzas aplicadas á las diferentes partes del systema, ora no sean agentes sino algunas de ellas, siendo las demás capaces solo de resistir, como serían los apoyos, puntos fijos, superficies, &c. que se opusiesen á la accion de las demás fuerzas. Porque las resistencias de estos obstáculos son equivalentes á fuerzas agentes.

Principio general del Movimiento.

174 *De qualquier modo que lleguen á alterar sus movimientos actuales muchos cuerpos; si concebimos que el movimiento que tendria en el instante inmediato cada cuerpo si llegara á estar libre, se resuelva en otros dos, el primero de los quales sea el que tendrá realmente despues de la variacion; el segundo debe ser tal, que si no tuviera cada uno de los cuerpos mas movimiento que este, estarian en equilibrio todos los cuerpos.*

Esto es evidente, porque si de estos segundos movimientos no resultase equilibrio en el systema, los primeros movimientos componentes no serian los que tendrian los cuerpos despues de la alteracion, porque por precision los alterarian los segundos.

Con-

Fig.

Consecuencias que se sacan de los dos principios precedentes, respecto del movimiento del centro de gravedad de los cuerpos.

175 Concibamos ahora que muchos cuerpos ya libres, ó ya atados unos con otros, sea como fuere, con tal que no haya cosa que sugete el systema de todos ellos, lleguen á recibir impulsos qualesquiera que no puedan seguir plenamente, por sugetarse mutuamente unos á otros; el movimiento del centro de gravedad será el mismo que si hubieran estado libres todos los cuerpos.

Porque tome el movimiento que tomare cada parte del systema, siempre podemos (73) considerar el que se le comunica, como compuesto del que adquirirá, y de otro. Pero como (174) en virtud de estos segundos movimientos ha de haber equilibrio; si concebimos cada uno de estos segundos movimientos resuelto en otros tres paralelos á tres lineas perpendiculares entre sí, la suma de las fuerzas que resultarán paralelamente á cada una de dichas lineas ha de ser cero (170). Pero el camino que intenta andar el centro de gravedad en virtud de cada una de dichas fuerzas, es (161) igual á la suma de las fuerzas paralelas á cada una de dichas lineas dividida por la suma de los cuerpos; luego el camino que intenta andar en virtud de las mudanzas sobrevenidas en el systema, causadas por la accion recíproca de las partes de dicho systema, es cero; luego el centro de gravedad no entra á

la

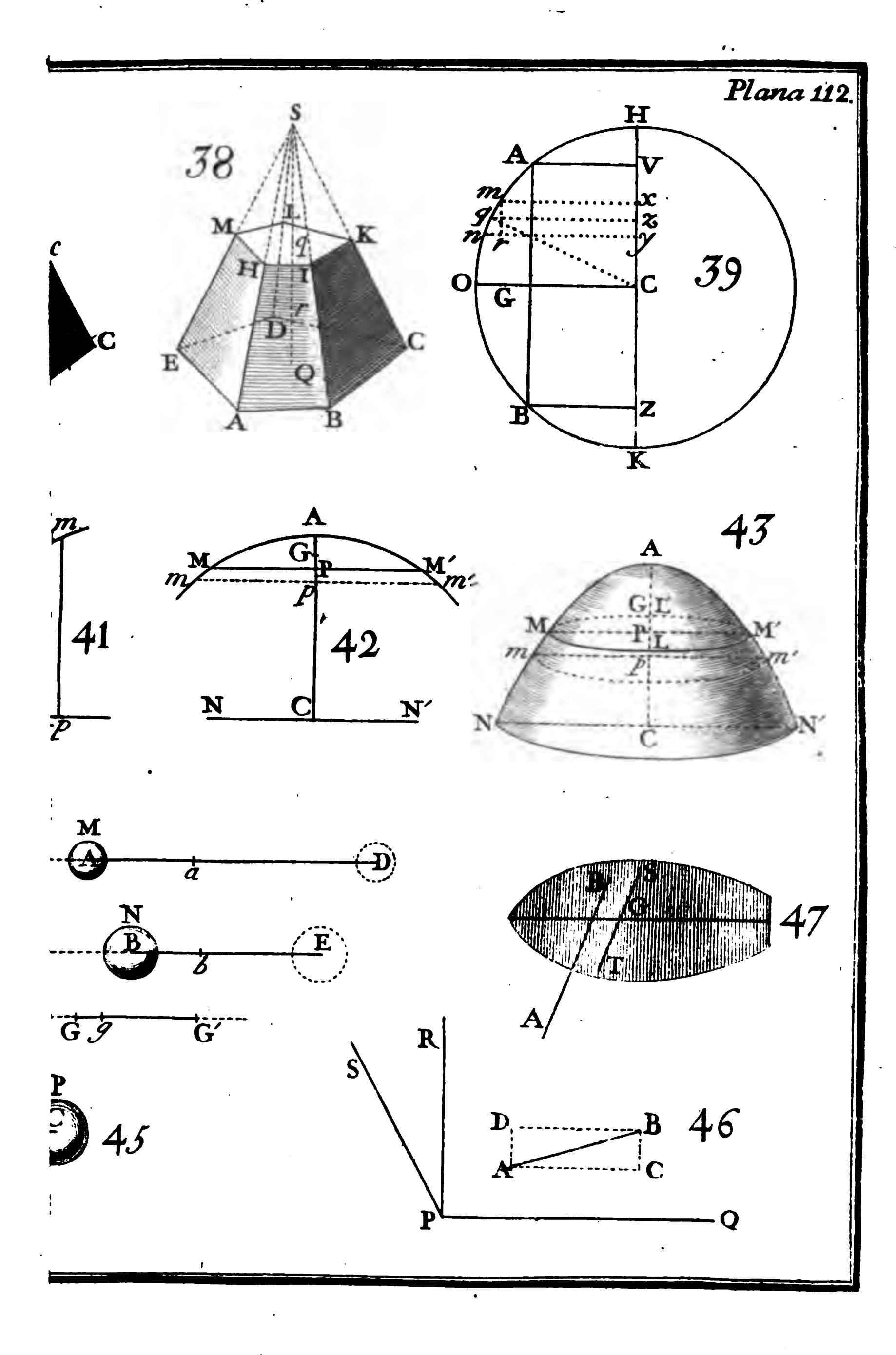
Fig. la parte de dichas mudanzas. Luego se mueve del mismo modo que si cada una de las partes del systema obedeciera libremente, y sin pérdida alguna, á la fuerza que la solicita.

Luego en general *la accion mutua de las partes de un cuerpo ó systema de cuerpos no causa mudanza alguna en el estado de dicho cuerpo ó systema.*

176 De aquí inferiremos 1.° que *si un cuerpo ó systema de cuerpos gira ó dá vueltas de qualquiera modo al rededor de su centro de gravedad, dicho centro permanecerá en el mismo estado, del mismo modo que si el cuerpo no girara.*

177 2.° Del mismo principio, y de lo que digimos antes acerca del movimiento del centro de gravedad de los cuerpos libres, se sigue, que si á un cuerpo, sea la que
47. fuere su figura, ó á un systema de cuerpos se le dá un impulso ácia una direccion qualquiera *AB*, que se comunique todo entero á dicho cuerpo; el centro de gravedad *G* se moverá por una linea *GS* paralela á *AB*, del mismo modo que si dicha fuerza se le aplicára inmediatamente ácia la misma direccion. Y si muchas fuerzas obraren á un tiempo en diferentes puntos de dicho cuerpo, el centro de gravedad se moverá del mismo modo que si dichas fuerzas obrasen inmediatamente en él.

178 Luego si en el instante que se le dá al cuerpo el impulso ácia la direccion *AB*, se le aplicára al centro de gravedad *G* una fuerza cuya direccion *GS* fuera opuesta é igual á la del impulso, el centro de gravedad se mo-


38
S
M
L
K
H
I
D
E
C
Q
A
B
39
H
A
V
m
x
g
z
n
r
y
O
G
C
B
Z
K
41
42
43
A
G
M
P
M′
m
p
m′
N
C
N′
L
M
A
a
D
N
B
b
E
G
g
G′
P
45
47
S
G
T
46
R
S
D
B
A
C
P
Q

estaría quieto. Sin embargo es evidente que las demás partes del cuerpo no se estarian quietas, porque las dos fuerzas espresadas, bien que iguales, no son directamente contrarias. Se viene á los ojos que el único movimiento que puede tener un cuerpo cuyo centro de gravedad se mantiene inmobil, es un movimiento de rotacion al rededor de dicho centro de gravedad. Fig.

Luego *si á un cuerpo se le dán uno ó muchos impulsos ácia direcciones que no pasan por su centro de gravedad; 1.° Este centro de gravedad se moverá del mismo modo que si todas las fuerzas obraran inmediatamente en él, obrando cada una de ellas ácia una direccion paralela á la que sigue. 2.° Las partes de dicho cuerpo girarán al rededor del espresado centro de gravedad, del mismo modo que girarian en virtud de las fuerzas que obran actualmente en el cuerpo, si su centro de gravedad estuviese sugeto.*

179. Tambien inferiremos que si el estado del centro de gravedad de un cuerpo llega á variar, esto no puede suceder sino en virtud de la accion ó resistencia de nuevas fuerzas estrañas para el cuerpo, y que por consiguiente esta variacion siempre se determinará buscando la fuerza que resultaría de todas las espresadas, si cada una de ellas obrara en el centro de gravedad ácia una direccion paralela á la que tiene actualmente.

Fig.

Usos de los Centros de Gravedad para la medida de la estension.

180 Por medío de los centros de gravedad se consigue resolver muchas y muy arduas cuestiones pertenecientes á la medida de las superficies, y de los sólidos. Todas las operaciones que para este fin se han de egecutar, están fundadas en la proposicion siguiente, llamada la regla de *Guldin*, porque así se llamaba su inventor, y que probaremos respecto de todos los casos que encierra.

Toda cantidad que gira ó dá vueltas, multiplicada por el camino que anda su centro de gravedad, engendra otra cantidad un grado mas elevada que ella; por manera que *toda linea que dá vueltas, multiplicada por el arco que traza su centro de gravedad, es igual á la superficie que engendra; toda superficie que gira, multiplicada por el camino que anda su centro de gravedad, es igual al sólido que engendra.*

48. 181 Si suponemos primeramente que esté en K el centro comun de gravedad de varios puntos A, B, D igualmente pesados, puestos en una misma linea AD, al rededor de cuyo punto C han de girar, es constante que los espresados puntos andarán respectivamente los arcos semejantes AA', BB', DD', y el centro de gravedad K andará el arco KK', se podrá inferir de lo dicho (108) que $AA' + BB' + DD'$ es igual al arco KK' tomado tantas veces quantos fueren los puntos graves A, B, D, ó que si llama-

mamos N el número de estos puntos, será $AA' + BB' +$ Fig.
$DD' = N \times KK'$.

Porque si tomamos los momentos de dichos puntos respecto de C, tendremos (108) $A \times AC + B \times BC + D \times DC = (A + B + D)\ KC$; y como los cuerpos A, B, D son iguales, pues cada uno de ellos es un punto, la equacion se transforma en $A \times AC + A \times BC + A \times DC = 3A \times KC$, y dividiéndolo todo por A sale $AC + BC + DC = 3KC = N \times KC$, pues suponemos $3 = N$. Luego substituyendo en ésta equacion en lugar de las rectas CA, CB, CD, CK los arcos AA', BB', DD', KK', que las son proporcionales, sacaremos $AA' + BB' + DD' = N \times KK'$.

De lo dicho (116) se ha de inferir que si al- 49.
gunos de los puntos propuestos, el punto D, por egemplo, estuviese mas allá del centro de giracion ó revolucion C, el arco DD' no se habria de sumar con los demás, sino que se deberia restar, sin cuya circunstancia no se verificaría la equacion.

182 Queda, pues, probado que se verifica la regla de Guldin respecto de los puntos, quando todos están en una misma linea recta con el centro de rotacion. Pero quando no lo están se corre riesgo de padecer alguna equivocacion al tiempo de aplicarla ó usarla.

Supongamos, para hacerlo patente, que esté en K 50.
el centro comun de gravedad de los dos puntos A y B que no están en un mismo plano con el centro de rotacion C.

Fig. Tiraremos las rectas CA, CB, CK; las CK, AP, BQ perpendiculares á PQ. Por lo dicho (181) ha de ser $AP + BQ = N \times CK$; pero CA es mayor que AP, y CB mayor que BQ; luego $CA + CB$ será mayor que $N \times CK$. Y como los arcos trazados por los puntos A, B, K son proporcionales á los radios CA, CB, CK; serán por consiguiente los arcos trazados por los puntos A y B mayores que el arco andado por el punto K multiplicado por N.

183 Para que se verifique tambien en este caso la regla de Guldin, se practicará lo siguiente. Desde el punto C se tirará una linea qualquiera CA; desde C como centro, y con el radio CB se trazará el arco BD, que dejará señalado en la recta CA el punto D. Imaginemos que en lugar del punto B se ha substituido el punto D; proyéctese circularmente el punto B en D en una linea CA dada de posicion; búsquese el centro de gravedad H de los puntos A y D. Los arcos andados por los puntos A y B serán iguales al arco andado por el punto H multiplicado por N.

Lo probaremos imaginando, que siendo C el centro de giracion, la linea CA llega á CA', la CB á CB', y los puntos A, B, D, H andan respectivamente los arcos AA', BB', DD', HH'. Los ángulos BCA, $B'CA'$ serán iguales, pues son un mismo ángulo puesto en distinta posicion; luego si restamos el ángulo comun $B'CA$, los residuos BCB', ACA' serán iguales, y por consiguiente los arcos BB', DD' que tienen un mismo radio serán iguales. Y como (181)

AA'

$AA' + DD' = N \times HH'$, será $AA' + BB' = N \times HH'$. Fig.

184 De esto inferiremos para el caso en que los puntos no están en un mismo plano con el centro de gravedad la regla siguiente. *Proyectense circularmente todos los puntos en una linea tomada á arbitrio que pase por el centro de rotacion; búsquese el centro de gravedad de los puntos que resultaren de la proyeccion; el producto del arco que este trazare multiplicado por el número de los puntos será igual á la suma de los arcos andados por los puntos propuestos.*

Esta construccion está diciendo lo que se ha de practicar para determinar el punto H, ó la distancia á que está 50.
del de giracion C. Porque (181) $CA + CD = N \times CH$; y como $CD = CB$, será $CA + CB = N \times CH$. Por consiguiente asi como por medio de las distancias á que están de la PQ los puntos propuestos, se determina la distancia CK del centro de gravedad; tambien se determina la CH por medio de las distancias á que están los puntos propuestos del centro de rotacion C. En conociendo CH, y determinando el ángulo de rotacion, queda determinado el arco, cuyo producto por el número N será igual á la suma de los arcos andados por los puntos A y B.

185 Solo falta prevenir acerca de esto, que se pue- 51.
de proyectar circularmente el punto B en la linea CA de dos modos, ó de modo que los puntos A y D estén á un mismo lado respecto del centro de rotacion, ó de modo que estén el uno á un lado, y el otro á otro del espresado centro. En el primer caso la suma de los arcos andados

Fig. por los puntos *A* y *B*, es igual al arco andado por el punto *H* multiplicado por *N*: en el otro caso el producto del arco andado por el punto *H* multiplicado por *N* será igual á la diferencia de los arcos andados por los puntos *A* y *B*. Por consiguiente para sacar la suma de los arcos, se han de proyectar á un mismo lado respecto del centro de rotacion; y para sacar su diferencia, se habran de proyectar dichos puntos en lados opuestos.

186 Quanto hemos dicho en el supuesto de que se haga la giracion en un mismo plano, y al rededor de un punto, se aplica igualmente al supuesto de que se haga el movimiento de rotacion al rededor de un ege, no estando los puntos en un mismo plano, al qual sea perpendicular al ege de rotacion. Porque ó todos los puntos están en un mismo plano que pase por el ege de rotacion, y entonces se verifica la regla de Guldin, esto es que la suma de los arcos andados por cada uno de los puntos es igual al arco andado por su centro comun de gravedad, multiplicado por su número. Si todos los puntos no estuvieren en un mismo plano que pase por el ege de rotacion; se concebirá un plano que pase por el ege de rotacion, en el qual se proyectarán circularmente todos los puntos; se buscará el centro comun de gravedad de los puntos proyectados en el plano; y el producto del camino que este anduviere, multiplicado por el número de los puntos, será igual á la suma de todos los arcos andados por cada uno de los puntos propuestos.

Su-

187 Supongamos ahora, que la linea AB gire al rededor del punto C, por el qual pasaria si se la prolongara, y que su centro de gravedad esté en su punto del medio K; nos toca probar que la superficie $ABB'A'$ que engendra en virtud de su movimiento es igual al rectángulo de la misma linea BA multiplicada por el arco KK' andado por su centro de gravedad K. Fig. 52.

Si despues de prolongada hasta C la linea propuesta AB, llamamos CB, a; BM, x; el elemento MN, dx; MM', y; y tomamos los momentos de las dx consideradas como pesos ó fuerzas respecto del punto C, tendremos (181) $S.(a+x)dx = CK \times S.dx$. Pero á todas las distancias $CM = a + x$ corresponden arcos que las son proporcionales, del mismo modo que á la distancia CK corresponde el arco KK'; luego substituyendo estos arcos en lugar de las espresadas distancias sacaremos $S.ydx = KK' + S.dx$, y suponiendo $x = BA$, será $S.ydx = KK' \times AB$. Y como en el mismo supuesto $S.ydx$ es (III. 566) igual á la area $ABB'A'$, será tambien dicha area $= KK' \times AB$.

Si el punto B coincidiere con el centro de rotacion C, la faja ó zona engendrada sería un sector circular, cuya area sería por consiguiente igual al producto del radio del sector multiplicado por un arco análogo del círculo cuyo radio fuese la mitad del radio del sector.

Pero si el punto B estuviera en b al otro lado del punto C que entonces dividiria la recta Ab; en este supuesto el sector trazado por CA menos el sector trazado por Cb, sería

 ría

Fig. ría igual al producto de toda la Ab multiplicada por el camino andado por el centro de gravedad. Esto es evidente por lo dicho (116).

188 Todo esto debe entenderse respecto de las líneas que giran con la circunstancia de que si se las prolongára pasarian por el centro de giracion. Respecto de las lineas que giran al rededor de un punto por el qual no pasan, hemos de hacer algunas prevenciones, sin las quales se podrian cometer algunas equivocaciones en la aplicacion de la regla de Guldin. En este caso es preciso valerse de la proyeccion circular del mismo modo, con corta diferencia, que declaramos antes acerca de los puntos.

Supongamos, pues, que una linea qualquiera BA gire
53. al rededor del punto C, por el qual no pasa aunque se la prolongue, y que pase de la posicion BA á la $B'A'$, por manera que haya engendrado la superficie $B'BAA'$ terminada por dos arcos circulares BB', AA', cuyos radios son respectivamente CB, CA, y por las dos rectas AB, $A'B'$. Para determinar esta superficie tiraremos una linea qualquiera CA, y desde el punto C como centro, y con el radio CB trazaremos el arco BD, para proyectar circularmente en DA la linea BA. Buscaremos el centro de gravedad K de la DA, que está en su punto del medio. Imaginaremos que la recta DA gira juntamente con la BA al rededor del centro C. Quando la BA llega á $B'A'$, la recta DA llega á $D'A'$, y su centro de gravedad K anda el arco circular KK'. Todo esto supuesto, probaremos que el

el espacio $BAA'B'$ que la recta BA engendra miéntras Fig.
gira es igual á $DA \times KK'$

Porque el triángulo mixtilineo BDA es de todo punto igual al triángulo $B'D'A$, porque si sobrepusiéramos el arco $B'D'$ al arco BD, convendrian perfectamente uno con otro. Luego si á cada uno de los espresados triángulos le añadiésemos el espacio $DBAA'$, el espacio $BB'A'A$ será igual al espacio $DD'A'A$; y como á este último le engendra la recta DA que pasa por el centro C de rotacion, ha de ser igual á $DA \times KK'$; luego tambien el espacio $BB'A'A$ $= DA \times KK'$.

189 Es menester poner cuidado en no cometer alguna equivocacion al tiempo de egecutar la proyeccion circular. Porque muchas veces se han de considerar dos lineas como que se confunden en un mismo lugar, conforme vamos á declarar. Supongamos que la linea AB haya de girar 54.
al rededor del punto C, desde cuyo punto se la tire la perpendicular CE, que servirá de radio para trazar el círculo EFE'. Despues de tirada la recta CA, proyectaremos en ella la recta AE, y tendremos la linea AF. Desde el centro C, y con el radio CB trazaremos despues el arco BD, y proyectaremos circularmente en FD la linea BE. Es evidente que la recta FD nace de la proyeccion circular de la linea AE, y de la BE; por consiguiente en FD se han de considerar como confundidas y penetradas una con otra dos lineas; y en este supuesto se ha de buscar el centro de gravedad de las lineas que resultan de la proyeccion.

Pe-

Fig. Pero entonces se ha de mirar con cuidado qué espacio engendra la linea AB. Supongamos que moviéndose la linea propuesta desde AB á $A'B'$ los puntos A, E, B tracen los arcos semejantes AA', EE', BB'. La parte AE engendrará el espacio $AEE'A'$ interceptado entre los arcos semejantes AA', EE', y entre las rectas iguales AE, $A'E'$; la parte BE engendra el espacio $BEE'B'$ interceptado entre los arcos semejantes BB', EE', y las rectas iguales BE, $B'E'$; estos dos espacios tienen comun la parte $EOB'E'$ terminada por las dos rectas iguales EO, $E'B'$, y los dos arcos OB', EE'. Por consiguiente hemos de concebir allí confundidos uno con otro dos espacios, á fin de que el espacio engendrado por la linea BA sea igual al rectángulo de $AF + FD$ multiplicada por el camino que hubiese andado el centro de gravedad de estas dos lineas.

Prolónguese el arco BB' hasta que corte $A'B'$ en O'; es
54. evidente que el segmento BEO es igual al segmento $B'E'O'$; luego añadiéndole á cada segmento el espacio $EOB'E'$, será la zona $BEE'B' = EOO'E'$. Pero la primera es engendrada de BE, y la segunda de OE; luego las zonas que engendran las lineas iguales EO, EB que están á distintos lados de la perpendicular, salen iguales. Por lo que, si se buscan separadamente las zonas engendradas primero por AE, y despues por OE, saldrá la zona engendrada por AB.

190. Será provechoso en muchos casos hacer uso de la proyeccion al otro lado del punto C, conforme manifes-
55. taremos. Supongamos que se haya de proyectar circularmente

te la recta *AB*, con la mira de determinar la superficie que engendrará en su movimiento de rotacion. Le añadiremos á la recta *AB* una linea qualquiera *BE*, y desde el punto *C* como centro con el radio *CE*, trazaremos el semicírculo *FEH*, y estará la linea *EA* proyectada circularmente en *AF*. Desde el punto *C* como centro, y con el radio *CB* trazaremos despues el arco *BD*, y con esto la linea añadida *BE* estará trazada circularmente en *DH* al otro lado del centro *C* de rotacion. Si el centro de gravedad comun de las dos lineas estuviere en *K*, la faja que *BA* engendráre será igual al producto de *AF* + *HD* por el camino que hubiere andado el punto *K*. Fig.

Porque la faja que *BA* engendráre es igual á la faja engendrada por *AE* menos la faja engendrada por *BE*; pero la primera es igual á la faja engendrada por *FA*, y la otra es igual á la faja engendrada por *DH*; luego la faja engendrada por *BA* es igual á la diferencia de las fajas engendradas por las lineas *FA*, *DH*. Y como esta es igual á $(AF + HD) \times$ el camino que anduviere el punto *K*; la faja engendrada por *BA*, será tambien igual á $(AF + HD) \times$ el camino andado por el punto *K*.

Quanto hemos dicho de las lineas rectas se aplica tambien á las lineas curvas.

191 Hasta aquí hemos supuesto que todos los puntos de la linea que gira estén en un mismo plano al qual sea perpendicular el ege de rotacion. Consideremos ahora los casos en que alguna porcion de la figura está fuera de di-

Fig. dicho plano. Supongamos primero que la figura generatriz esté en un mismo plano que pase por el ege de rotacion; en este caso será tambien el producto de la figura generatriz multiplicada por el camino andado por su centro de gravedad, igual á la figura engendrada. Esta proposicion abraza dos casos, porque la figura generatriz puede ser una linea que engendra una superficie, ó una superficie que engendra un sólido.

I. Supongamos que el ege de revolucion sea *CDP*,
56. por el qual pase el plano en el qual está la linea *AB*, sea recta, sea curva, cuyo centro de gravedad esté en *K*. Tírese desde dicho centro la *DK* perpendicular al ege. Desde un punto qualquiera *M* tírese tambien la *MP* perpendicular al ege, tómese la parte infinitamente pequeña *MN*, y y llámese *MP*, x; *MN*, du. Por lo dicho (181) será $S.\, xdu = KD \times S.du$. Pero haciéndose la rotacion al rededor del ege *CP*, los arcos trazados por *M*, que llamaremos y, y el arco trazado por *K*, que llamaremos K', serán proporcionales á las distancias *MP*, *KD*; luego despues de substituidos dichos arcos en lugar de dichas lineas, resultará $S.\, ydu = K' \times S.\, du = K' \times AB$, siendo $u = AB$; Y como en este supuesto $S.ydu$ es igual á la superficie engendrada por *AB*, será dicha superficie igual á la linea *AB* multiplicada por el arco que trazáre su centro de gravedad *K*.

192 II. Sea ahora la figura que gira una superficie
57. dividida en sus elementos *RSVT* por lineas paralelas al ege de

de rotacion CD. Supongamos que esté en K el centro de gravedad de dicha figura, con lo que será KD su distancia del ege de revolucion; llamaremos x la distancia á que estará del ege el elemento RV, y al mismo elemento le llamaremos du. Por lo dicho (181) será $S.xdu = KD \times S.du$; pero x y KD son proporcionales á los arcos trazados á un mismo tiempo, que llamaremos y y K'; luego despues de egecutadas las substituciones correspondientes, sera $S.ydu = K \times S.du = RVZ.K'$, y como en este supuesto $S.ydu$ es el sólido engendrado durante la revolucion; será, pues, este el sólido igual al producto de la superficie generatriz multiplicada por el camino que hubiere andado su centro de gravedad. Fig.

193 Si alguna porcion de la figura generatríz estuviera al otro lado del ege de revolucion, la figura que esta porcion engendrára se deberia restar de la otra para que se verificára la regla de Guldin, conforme hemos dicho antes.

194 Si la figura generatriz no estuviera en un mismo plano que pasára por el ege de revolucion; sería preciso proyectarla circularmente en un plano que pasára por el ege de revolucion; se determinaria despues el centro de gravedad de la figura que resultára de la proyeccion circular; multiplicariamos finalmente esta figura por el arco que trazára su centro de gravedad, y el producto sería el valor de la figura engendrada en la revolucion.

Escusamos probar esta proposicion por ser evidente en virtud de lo dicho antes.

Quan-

Fig. 195 Quando se conoce, ó es facil de determinar el centro de gravedad de la figura generatriz, sea linea, ó superficie, como sucede respecto de las figuras rectilineas, de todo el círculo, de la elipse, y de todas las figuras que se componen de quatro partes iguales y semejantes, en estos casos es muy facil la aplicacion de la regla de Guldin. Esta regla manifiesta por sí, que con tal que esté siempre á la misma distancia del ege de revolucion el centro de gravedad, resultará siempre una misma cantidad, esté la figura generatriz en la situacion que estuviere, mientras estuviere en el mismo plano de rotacion.

196 Si la figura generatriz constare de dos partes iguales y semejantes, separadas por una linea recta, su centro de gravedad estará en dicha linea. Si esta linea fuese paralela al ege de rotacion, sería escusado buscar el centro de gravedad, porque en qualquiera parte que esté, estará siempre á la misma distancia del ege de rotacion.

197 Pero supone este modo de medir la estension, que sea dada la cantidad de la figura generatriz; por cuyo motivo es preciso que sea muy sencilla, ó que esté yá reducida á otra mas sencilla. Si se hubiere de practicar esta preparacion, y determinar despues el centro de gravedad, no sería poco el trabajo. Sería, pues, conducente dividir en estos casos la figura generatriz en sus elementos, y multiplicar cada uno de estos por el camino que anduviere su centro de gravedad; despues se tomaria la integral que espresaria el valor de la figura engendrada.

Si

198 Si la figura generatriz fuese, por egemplo, la linea AB, la dividiríamos en sus elementos MN, tiraríamos las MP, NQ perpendiculares al ege de revolucion; llamaríamos $r : c$ la razon del radio á la circunferencia, y haríamos esta proporcion $r : c :: MP : \frac{c}{r}MP$, cuyo quarto término multiplicado por $MN = du$ sería el valor del elemento de la superficie engendrada, cuyo elemento sería por consiguiente $= \frac{c}{r}MP . du$. Y como de la equacion de la curva se puede sacar el valor de du en MP, se podrá hallar por medio de la integracion el valor de la superficie engendrada. Fig. 56.

199 Pero si la figura generatriz fuese una superficie, hay muchos modos de dividirla en sus elementos. Si dicha superficie tuviere un ege paralelo al ege de rotacion, será muy del caso dividirla en sus elementos por medio de lineas perpendiculares á su ege de rotacion. Esto se puede egecutar en la superficie ABD cuyo ege AD es paralelo al ege de rotacion EC, que por consiguiente dividiremos en sus elementos tirando las rectas RM, NS las quales prolongadas 58. son perpendiculares al ege CE. Llamaremos EA, b; AR, x; RM, y. Supondremos que el centro de gravedad del elemento RN esté en K, cuya distancia al ege de revolucion CE será $= b + \frac{y}{2}$. Luego (III. 597) el elemento del sólido engendrado será $\frac{c}{r}(b + \frac{y}{2})ydx$.

Si la superficie en lugar de estar terminada por la linea BD paralela á las ordenadas, lo estuviere por la linea BG ó BF; para hallar el valor del sólido cuyo elemento $= \frac{c}{r}(b + \frac{y}{2})ydx$, haríamos $x = AD$, y al sólido $= S.\frac{c}{r}$

(b

Fig. $(b+\frac{y}{2})ydx$ le añadiríamos el sólido engendrado por el triángulo BDF, ó le quitaríamos el que engendraré el triángulo BDG.

Tambien hay casos en que acomoda mas dividir la
59. superficie generatriz en sus elementos por medio de lineas paralelas al ege de revolucion. Llamemos BE, b; BS, x; SM, y; y el centro de gravedad K del elemento BM estará á la distancia $=b-x$ del ege de revolucion; será, pues, el elemento del sólido engendrado $=\frac{c}{r}(b-x)ydx$.

200 Aunque las circunstancias de las cuestiones que pueden ocurrir sugerirán al calculador los artificios la que podrá apelar, no podemos menos de considerar, bien que de paso, el caso particular en que se tratare de determinar el sólido engendrado por una superficie curva terminada por tangentes de la misma curva.

60. *Sea* AMB *una curva qualquiera comparada con la linea* CS, *en la qual rematan las tangentes como* MR *tiradas desde los diferentes puntos de la misma curva; y propongamonos determinar el sólido engendrado por una superficie terminada por* AC, CR, *una porcion de la curva, y su tangente.* Tiraremos las dos tangentes infinitamente próximas MR, NS, y desde el punto O donde concurren como centro, con el radio OR trazaremos el arco RT; el elemento de la superficie será el sector ORT, cuyo centro de gravedad K estará del punto O á la distancia (139) de las dos terceras partes del radio.

Desde un punto qualquiera C tiraremos las CF, CG pa-

paralelas é iguales á las rectas *MR*, *NS*, y tiraremos *FG*; Fig.
el sector *FCG* será $=$ *ORT*, y su centro de gravedad estará del punto *C* á la distancia de las dos terceras partes de *CF*. Por consiguiente si tiramos las *KP*, *HQ* perpendiculares á la *CS*, tendremos, llamando *r* el radio *OR*, *HQ*: *KP* :: $\frac{2}{3}r : \frac{1}{3}r$ :: 2 : 1.

Sentado esto, una vez que el sólido engendrado por *ORT* es $=$ *ORT* multiplicado por la circunferencia cuyo radio es *KP*, y el sólido engendrado por *CFG* $=$ *CFG* multiplicado por la circunferencia cuyo radio es *HQ*, el primer sólido será al segundo como 1 : 2; y como esta razon es constante, tambien se verificará en cantidades finitas.

201 Supongamos que sea *AMB* la curva llamada 60.
Tractoria, cuya naturaleza consiste en que su tangente *MR* es una linea constante, y que sea *AC* su primera tangente. Es evidente que la figura en que rematan las lineas iguales y paralelas á las tangentes de la curva, es la circunferencia de círculo *AG*; por consiguiente el sólido engendrado por el espacio *ACRM* girando al rededor de *CR*, será al sólido engendrado por el espacio *ACG* dando la vuelta al rededor de *CE* :: 1 : 2. Luego el sólido infinitamente largo, engendrado por la curva, girando al rededor de su asýmtota, será la mitad del emisferio cuyo radio fuese la tangente de la curva.

Fig.

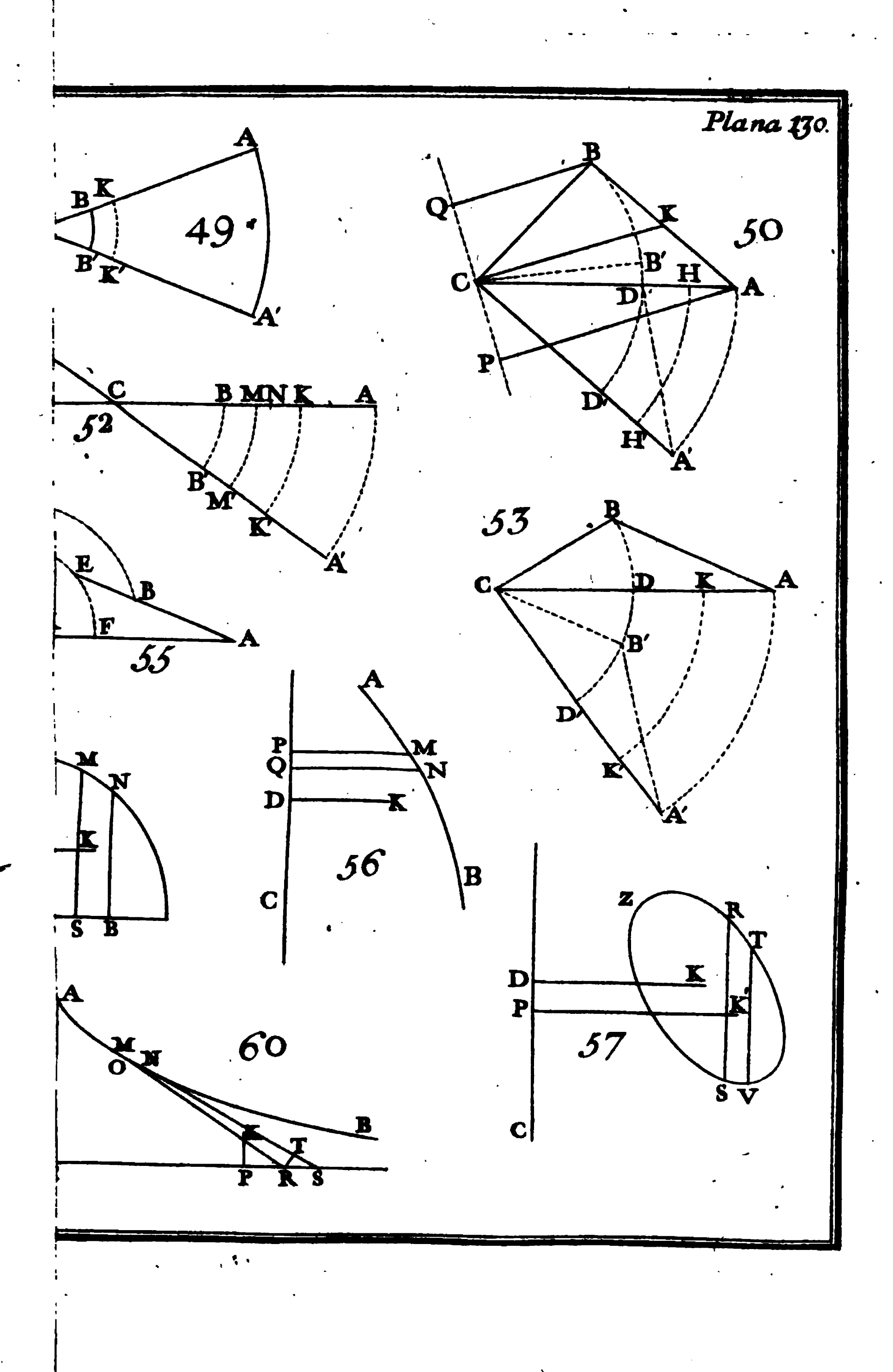
Del Movimiento de los cuerpos pesados por los Planos inclinados.

202 Un cuerpo pesado entregado á sí mismo sobre
61. una superficie plana *KLHI* inclinada al orizonte *PIHN*, no obedece con libertad á su pesantez. Parte del impulso que le imprime la pesantez se gasta en comprimir el plano; y la otra parte se gasta en mover el cuerpo á lo largo de dicho plano. Es, pues, preciso que se resuelva la pesantez en dos fuerzas, la una de las quales cause la presion en el plano, y la otra el movimiento á lo largo del plano.

Supongamos, pues, que sea *G* el centro de gravedad de dicho cuerpo, ó el punto en el qual se debe considerar como reconcentrado (156) todo el conato de la pesantez, y que represente *GB* el espacio que andaría cayendo en un instante, si estuviese libre. Tiremos *GC* perpendicular al plano *KLHI*; y concibamos que por *GB* y *GC* pase otro plano; este plano será perpendicular á los dos planos *KLHI*, *IPNH*, pues pasa por rectas perpendiculares á estos planos. Luego si imaginamos que *DE*, *EF* sean las intersecciones de dicho plano prolongado con los dos planos *KLHI*, *IPNH*; *DE*, *EF* serán perpendiculares á la interseccion comun *HI* de dichos dos planos.

Tiremos *GA* paralela á *DE*, y concibamos el paralelogramo *GABC*, cuya diagonal sea *GB*, siendo *GA*, *GC* los lados. Podemos suponer (69) que la gravedad en lugar de impeler el cuerpo ácia *GB*, le solicita á que se

mue-


49
A
B K
B' K'
A'
50
B
Q
K
C
B'
H
A
D
P
D'
H'
A'
C
B M N K
A
52
B'
M'
K'
A'
53
B
C
D
K
A
B'
D'
K'
A'
E
B
F
A
55
A
P
M
Q
N
D
K
56
C
B
M
N
K
S B
Z
R
T
D
K
P
K'
57
S V
C
A
60
M
O N
B
K
T
P R S

mueva ácia *GC*, con la velocidad *GC*, y ácia *GA* con la velocidad *GA*. Pero es evidente que por ser *GC* perpendicular al plano, no puede menos de ser destruida, si el punto *O* en que encuentra el plano, es al mismo tiempo un punto del cuerpo. Fig. 61.

Por lo que mira á la fuerza *GA*, como no intenta, ni arrimar, ni apartar al cuerpo del plano, por ser paralela al plano, no puede menos de surtir su efecto. Representa, pues, *GA* la velocidad que está para adquirir el cuerpo, y adquirirá en el primer instante.

Por estár la fuerza *GA* en el plano de las dos rectas *GB* y *GC* ha de estar en el plano *DEF*. Podemos, pues, prescindir de la estension de los dos planos *KLHI*, *IPHN*; 62.
y considerar solo el plano *DEF* representado en *DEF*; de suerte que podemos considerar que el cuerpo se mueve por la recta *DE*, que llamaremos el *Plano inclinado*: *FE* será su base, y representará el plano orizontal; á la perpendicular *DF* tirada desde un punto qualquiera *D* de *DE* á *EF*, la llamaremos *la Altura del Plano inclinado*.

203 Ya que la fuerza *GA* pasa por el centro de gravedad *G* del cuerpo *M*, se ha de repartir (157) igualmente entre todas las partes de dicho cuerpo. Luego si prescindimos del *rozamiento*, no tendrá, ni podrá tener el cuerpo sino movimiento para escurrirse á lo largo del plano, y ninguno para rodar, sea la que fuere su figura, con tal que la perpendicular *GC* pase por un punto del plano, que al mismo tiempo sea un punto de la superficie del cuerpo.

Fig. 62. No sucederá lo propio, conforme declararemos en otro lugar, quando la perpendicular al plano no encontrare la base del cuerpo, ó la superficie con que toca el plano; ó si hubiere rozamiento. Excepto este caso único, el cuerpo nunca puede rodar.

204 Ya que el cuerpo *M* ha de andar *GA* en el mismo tiempo que hubiera andado *GB* en virtud del impulso libre de la pesantez, si concebimos que al fin del primer instante vuelve á impelerle la gravedad; como en instantes iguales comunica esta fuerza grados iguales de velocidad, si imaginamos respecto del segundo grado de velocidad que comunicará en la direccion de la vertical, una resolucion de fuerzas semejante á la que hemos supuesto en el primer instante; echaremos de ver que el segundo paralelogramo será de todo punto igual al primero, y estará en el mismo plano que él. Inferiremos, pues, del mismo modo que quedará destruida la fuerza perpendicular al plano, y la fuerza paralela que será igual á *GA* se juntará con esta; de suerte que discurriendo del mismo modo respecto de los instantes siguientes, inferiremos generalmente que la velocidad á lo largo del plano inclinado crece por grados iguales; esto es, que *el movimiento de los cuerpos pesados por planos inclinados, es un movimiento uniformemente acelerado.* Luego quanto hemos dicho (36 y sig.) en orden á los movimientos uniformemente acelerados, se aplica, sin quitar ni poner, al movimiento á lo largo de los planos inclinados; de manera que las velocidades son como

mo los tiempos; los espacios andados son como los quadrados de los tiempos, ó como los quadrados de las velocidades, &c. Fig. 62.

205 Luego para poder determinar el movimiento sobre un plano de una inclinacion conocida, basta conocer la razon que hay entre la fuerza que acelera, y la pesantez; esto es, la razon entre *GA* y *GB*. Pero como *GA* y *GB* son paralelas á *DE*, *DF*, el ángulo *AGB* es igual á *EDF*; y por ser rectos los ángulos *A* y *F*, son semejantes los dos triángulos *AGB*, *EDF*, y dán *DE* : *DF* :: *GB* : *GA*; esto quiere decir, *que la longitud del plano inclinado es á su altura, como la velocidad que la pesantez comunicaria al cuerpo, si estuviera libre, es á la que le comunica efectivamente á lo largo del plano inclinado.*

Pero como la pesantez le imprime á un cuerpo libre en un segundo de tiempo, una velocidad con la qual andaria 30, 2 pies uniformemente por segundo (50); será facil determinar, en qualquiera ocasion, qué velocidad adquiere en el primer segundo de su caida un cuerpo que cae á lo largo de un plano inclinado. Por egemplo, si la longitud del plano es dupla de la altura, la velocidad adquirida á lo largo de dicho plano en el primer segundo, será la mitad de 30, 2 pies; quiero decir que si al cabo de un segundo dejase de obrar la pesantez, el cuerpo andaria 15, 1 pies en cada segundo.

Determinada por este método la velocidad respecto del primer segundo, se determinará la velocidad al cabo

Fig. de un número qualquiera de segundos, multiplicando aquella por el número de segundos; y se determinará el espacio, multiplicando la misma primera velocidad por la mitad del quadrado del mismo número de segundos (39). En suma, será facil determinar todas las demás circunstancias de estos movimientos en virtud de lo dicho (36 y sig.). De estos principios se infieren con facilidad las propiedades siguientes.

206 Si dos cuerpos graves que salen á un mismo tiempo del punto *D* bajan el uno á lo largo del plano in-
63. clinado *DE*, el otro á lo largo de la vertical *DF*, y se quiere saber á qué punto del plano *DE* ha llegado el primero, quando el segundo llega á un punto qualquiera *A*; todo se reduce á tirar *AB* perpendicular á *DE*, el punto *B* será el que se busca. Y de hecho, si representamos por p la velocidad que la gravedad comunica á un cuerpo libre en un segundo de tiempo, tendremos (52) llamando t el tiempo necesario para caer á lo largo de *DA*, $DA = \frac{pt^2}{2}$. Por otra parte (205) la velocidad que adquiere en un segundo el cuerpo que cae á lo largo de *DE* es $\frac{p \times DF}{DE}$; luego llamando T el tiempo necesario para caer desde *D* á *B*, tendremos (39) $DB = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; luego $DA : DB :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2} :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; pero $DA : DB :: DE : DF$; luego $DE : DF :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; luego $T^2 = t^2$, y $T = t$.

207 Luego si fuese *DG* un tercero plano andado
64. por un tercer mobil, que salió del punto *D* al mismo tiem-

po

po que los otros dos; tirando desde el punto *A* la perpendicular *AC*, los puntos *A*, *B*, *C* serán los puntos donde estos tres móbiles llegan al mismo tiempo. Fig. 64.

208. Si sobre *DA* como diámetro se describe una semicircunferencia, pasará (I. 376) por los puntos *C* y *B*, pues los ángulos *C* y *B* son rectos. Luego las cuerdas *DC* *DB* son andadas en el mismo tiempo que el diámetro vertical *AD*; y como esto no pende ni de la inclinacion, ni de la longitud de las cuerdas se puede decir generalmente, *que el tiempo de la caida por una cuerda qualquiera de un círculo, tirada desde el estremo del diámetro vertical, es el mismo que el tiempo de la caida por el mismo diámetro vertical.*

209 Acabamos de probar (205) que siendo p la velocidad que comunica la gravedad en un segundo de tiempo á un cuerpo libre es $\frac{p \times DF}{DE}$ la que comunica en el mismo tiempo al cuerpo que se mueve á lo largo de *DE*. Sean t y T los tiempos necesarios para andar *DF* y *DE*; tendremos $DF = \frac{pt^2}{2}$, y $DE = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; luego $DF : DE :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; luego $\frac{(DF)^2}{DE} \times T^2 = DE \times t^2$, ó $(DF)^2 \times T^2 = (DE)^2 \times t^2$, ó $DF \times T = DE \times t$; luego $t : T :: DF : DE$. Esto significa que *los tiempos necesarios para llegar á distintos puntos* F *y* G *de la orizontal* FE, *andando planos de igual altura, son entre sí como las longitudes de los mismos planos.*

210 La velocidad del cuerpo que cae por *DF*, es pt al cabo del tiempo t; por la misma razon la del cuerpo

Fig. que cae por DE es $\frac{p \times DF}{DE} \times T$ al cabo del tiempo T. Luego si llamamos u y v las velocidades adquiridas en llegando á F y E, tendremos $u : v :: pt : \frac{p \times DF}{DE} \times T$; luego $pvt = pu \times \frac{DF}{DE} \times T$. Pero acabamos de ver (205) que $t : T :: DF : DE$, de donde sacamos $t = \frac{DF \times T}{DE}$; substituyendo este valor de t, y reduciendo sale $v = u$. Luego *si muchos cuerpos andan planos de diferente inclinacion, pero de una misma altura, tendrán la misma velocidad despues de haber andado partes de igual altura, cada uno en su plano.*

De la Comunicacion del Movimiento.

211 Quando un cuerpo que se múeve choca con otro, es evidente que por razon de la impenetrabilidad mutua de ambos cuerpos, el primero ha de impeler al otro con quien tropieza; y como no hay (13) accion sin una reaccion igual, y contraria, es preciso que el cuerpo chocante pierda parte de su movimiento, y le comunique al cuerpo chocado. Si dos cuerpos en vez de obrar uno en otro en virtud de un choque inmediato, están atados unos con otros, ó con un hilo, ó con una varilla, ó de otro modo qualquiera, y se comunica movimiento al uno de los dos, se echa de ver que este no se moverá del mismo modo que si estuviera solo ó aislado, y que parte del movimiento pasará al otro cuerpo. Lo propio diremos del systema de un número qualquiera de cuerpos.

Para determinar en general lo que pasa quando muchos cuerpos se comunican el movimiento por la accion y reac-

cion

cion de unos en otros, distinguiremos dos casos; puede suceder que el systema esté de todo punto libre, esto es, no esperimente resistencia ninguna de parte de algun obstáculo; ó puede ser que estorve el movimiento del systema algun obstáculo, como por egemplo, quando los cuerpos están precisados á dár la vuelta al rededor de un punto fijo, &c. Veamos lo que pasa en ambos casos. Fig.

212 Todo cuerpo que se mueve guardaría al infinito su cantidad absoluta de movimiento (11) sin la menor alteracion. En quanto á esta circunstancia podemos considerar un systema de cuerpos como un cuerpo único; pues por lo que mira á la mobilidad del systema, lo mismo tiene que las partes del cuerpo se toquen inmediatamente, ó que estén unidas unas con otras por medio de hilos, varillas, &c. Por consiguiente la cantidad absoluta de movimiento comunicada á un systema qualquiera de cuerpos ha de permanecer siempre la misma ácia una misma direccion.

Pero ya que por una parte permanece siempre la misma la cantidad de movimiento ácia una misma direccion, y que por otra los cuerpos que componen el systema no pueden moverse sin que haya accion y reaccion de unos en otros en virtud de sus inercias particulares, y de los hilos ó varillas que los tienen unidos, conforme lo hemos reparado ya, se sigue que quando se les imprime movimiento á algunos de los cuerpos, no se les pega todo, y comunican parte á los demás cuerpos. Esta parte es *perdida* para los primeros, y *ganada* para los otros. Esta es,

pues,

Fig. pues, la ley constante y general que guardan los cuerpos al repartirse los movimientos. Los movimientos que pierden ácia cierta direccion algunos cuerpos del systema, los ganan los demás ácia la misma direccion, habiendo siempre igualdad entre los movimientos perdidos, y los movimientos ganados, del mismo modo que entre dos fuerzas que forman equilibrio una con otra. Se verifica esta igualdad en qualesquiera direcciones; esto es, de qualquiera modo que se resuelvan los movimientos perdidos, y los movimientos ganados, á los movimientos perdidos ácia una direccion siempre corresponden movimientos iguales ganados ácia la misma direccion. Si con la mira de facilitar la resolucion de alguna cuestion, ó por otros fines, se reducen todos los movimientos perdidos á una sola direccion, y se reducen los movimientos ganados parte á la misma direccion, parte á la direccion diametralmente opuesta, la suma de los movimientos perdidos será igual á la diferencia que hubiese entre la suma de los movimientos ganados ácia la misma direccion, y la suma de los movimientos ganados ácia la direccion diametralmente opuesta; porque entonces la espresada diferencia entre los movimientos ganados en particular es la verdadera cantidad absoluta de movimiento ganado, que corresponde á la cantidad absoluta de movimiento perdido, &c.

213 Quando no está libre el systema, y esperimenta la resistencia de algunos obstáculos, la cantidad absoluta de movimiento ácia una misma direccion no permane-

nece siempre la misma, como en el primer caso, porque Fig.
aniquila parte del movimiento la resistencia de los obstáculos; sin embargo siempre se podrá reducir este caso al primero. Para conseguirlo, se resolverán todos los movimientos particulares de los cuerpos, cada uno en dos especies de movimientos, tales que los unos se dirijan ácia los obstáculos, y los otros sean libres. Hecho esto, se les aplicará á los últimos todo lo dicho (212). Si el systema está precisado á dár la vuelta al rededor de un punto fijo, el momento del movimiento perdido al rededor de dicho punto, será igual al momento del movimiento ganado al rededor del mismo punto, &c.

Por movimiento perdido, y movimiento ganado siempre entenderemos la cantidad misma de movimiento; esto es (24) el producto de la masa por la velocidad perdida, y el producto de la masa por la velocidad ganada. Estas son las cantidades que forman las fuerzas absolutas con las quales los cuerpos obran mutuamente unos en otros, unos con su accion, otros con su reaccion.

Del Choque de los cuerpos.

214 Supondremos por ahora que los cuerpos son ó perfectamente duros ó perfectamente elásticos. No por esto dejan de aplicarse los métodos que daremos á los casos intermedios; pero nos parece del caso considerar no mas que los casos estremos; porque de este modo fijaremos mejor las ideas.

Llamamos *Cuerpo perfectamente duro* el que es tan

tie-

Fig. tieso, que no se puede doblar, ni aplanar quando se le comprime. Por *Cuerpo perfectamente elástico* entenderemos al contrario aquel que se aplana quando padece compresion, y vuelve á cobrar su primera figura en cesando la accion de la causa que le comprimia. Las leyes del choque de los cuerpos elásticos se infieren de las que corresponden al choque de los cuerpos duros.

215 Para que surta su efecto la percusion es indiferente que se muevan los cuerpos en un plano orizontal, ó en otro plano qualquiera; porque siendo infinita la fuerza de la percusion respecto de cada accion aislada é instantanea de la pesantez, es evidente que los efectos procedentes del choque mutuo de los cuerpos son los mismos, obre ó no la pesantez. Todas las variaciones que podria causar la pesantez en las velocidades de los cuerpos serían ó anteriores ó posteriores á las que proceden de la percusion. No obstante, supondremos que los cuerpos se mueven en un plano orizontal perfectamente terso, que por lo mismo aniquila el efecto de la pesantez. Supondremos tambien que los cuerpos son esféricos y homogeneos; porque aquí solo consideramos el movimiento progresivo del centro de gravedad, y no los movimientos de rotacion al rededor de dicho centro.

Es facil probar lo que decíamos poco ha, es á saber que la fuerza de la percusion es infinita respecto de cada accion aislada é instantanea de la pesantez. Porque cada grado de velocidad que comunica una fuerza aceleratriz ó re-

retardatriz, qual es la pesantez, cada instante, es infinitamente pequeño, pues á no ser así, al cabo de un tiempo finito el mobil tendria una velocidad infinita, caso imposible en la naturaleza. Esto manifiesta la distincion que hemos de hacer entre la fuerza de un cuerpo que se mueve uniformemente, y la fuerza aceleratriz ó retardatriz. La primera es una fuerza viva en virtud de la qual el mobil siempre tiene una velocidad finita: la segunda es una fuerza muerta, ó una *presion*, como suele llamarse, que en cada accion aislada no puede causar ó destruir mas que una velocidad infinitamente pequeña. Entre dichas dos fuerzas hay la misma razon que entre el finito y el infinitamente pequeño; entre una superficie, y una linea, &c. Fig.

Del Choque directo de los cuerpos.

216 Supongamos dos cuerpos duros A y B que se mueven ácia una misma direccion, de manera que A vá á chocar directamente con B que camina adelante con menos velocidad que A; es evidente que quando A alcanzare á B, le empujará hasta que sea una misma la velocidad de cada uno. Entonces cesará la accion de A en B, y los dos cuerpos proseguirán andando juntos con una misma velocidad, del mismo modo que si no formasen mas que una sola y misma masa, pues no hay causa ninguna que pueda obligarlos á que se separen. 65.

2.° La cantidad de movimiento que pierde el cuerpo A al impeler el cuerpo B, es igual á la cantidad de movi-

Fig. vimiento, que adquiere este último con su reaccion en *A* (212). Llámemos, pues, *V* la velocidad de *A* antes del choque; *v* la de *B* antes del choque; *x* la velocidad comun á ambos cuerpos despues del choque, es evidente que en virtud del choque la velocidad que *A* pierde será $V - x$, y la velocidad que *B* gana será $x - v$; tendremos, pues, $A(V - x) = B(x - v)$, de donde sacaremos $x = \frac{AV + Bv}{A + B}$ que espresa la velocidad con que caminarán los dos cuerpos despues del choque. Cuya espresion es igual á la suma de los movimientos de ambos cuerpos antes del choque, dividida por la suma de los mismos cuerpos.

217 De donde se sigue, que la velocidad que pierde el cuerpo *A*, esto es $V - x = V - \left(\frac{AV + Bv}{A + B}\right) = \frac{B(V - v)}{A + B}$, y que la velocidad ganada por el cuerpo *B*, esto es $x - v = \frac{AV + Bv}{A + B} - v = \frac{A(V - v)}{A + B}$. Por consiguiente la velocidad que pierde el cuerpo *A* es igual al producto del cuerpo *B* por la diferencia de las velocidades antes del choque, dividido por la suma de los cuerpos, y la velocidad que gana el cuerpo *B* es igual al producto del cuerpo *A* por la diferencia de las velocidades antes del choque, dividido por la suma de los cuerpos.

218 Si el uno de los dos cuerpos, pongo por caso el cuerpo *B*, estuviera en reposo antes del choque, haríamos $v = 0$; en virtud de esto la velocidad despues del choque sería $v = \frac{AV}{A + B}$; cuyo valor está diciendo que se ha de dividir la cantidad de movimiento que tenia el cuerpo chocante, por la suma de las masas.

Si

219 Si tomamos las rectas *AD*, *BD* proporcionales á las velocidades de los dos cuerpos antes del choque, y suponemos que sea *C* el centro de gravedad de los dos cuerpos puestos en *A* y *B* respectivamente; la parte *CD* representará su velocidad comun despues del choque, y por consiguiente será *AC* la velocidad perdida por el cuerpo *A* en virtud del choque, y *CB* será la velocidad que ganará *B*. Fig. 65.

Porque por la propiedad del centro de gravedad (108) es $CB = \frac{A \times AB}{A+B} = \frac{A(V-v)}{A+B}$; luego $CD = CB + BD = \frac{A(V-v)}{A+B} + v = \frac{AV+Bv}{A+B}$.

220 Supongamos ahora que los dos cuerpos caminen al encuentro uno de otro; es constante que el uno de los dos que tuviere mayor cantidad de movimiento, y que llamaremos el *Cuerpo chocante*, hará retroceder al otro, y que despues del choque caminarán juntos con una misma velocidad, del mismo modo que si no fuesen mas que una sola y misma masa. Sea *A* el cuerpo chocante, y llamemos respectivamente *V* y *v* las velocidades de *A* y *B* antes del choque.

Sentado esto, la cantidad de movimiento que pierde el cuerpo chocante *A*, es siempre igual á la cantidad de movimiento que gana el cuerpo *B*. Si llamamos *x* la velocidad comun de los dos cuerpos despues del choque en la direccion de *V*; es evidente que $V - x$ será la velocidad que hubiere perdido el cuerpo *A*; y $v + x$ la velocidad ganada por el cuerpo *B* ácia la direccion *V*. Porque

1.°

Fig. 1.° este cuerpo debe ganar en la direccion de V una velocidad que destruya la velocidad contraria v con la qual viene al encuentro de A. 2.° gana tambien ácia la misma direccion la velocidad x; por consiguiente gana en todo la velocidad $v + x$. Tendrémos, pues, $A(V - x) = B(v + x)$; de donde sacarémos $x = \frac{AV - Bv}{A + B}$; esto es, que la velocidad comun de los dos cuerpos despues del choque es igual á la diferencia de los movimientos antes del choque, dividida por la suma de los cuerpos.

221 Luego la velocidad que A pierde, esto es $V - x = V - \left(\frac{AV - Bv}{A + B}\right) = \frac{B(V + v)}{A + B}$, y la velocidad que B gana, ó $v + x = \frac{AV - Bv}{A + B} + v = \frac{A(V + v)}{A + B}$.

66. 222 Tomemos las rectas AD, BD proporcionales á las velocidades de los dos móbiles, y sea C el centro de gravedad de los dos cuerpos que suponemos puestos en A y B; el punto D está ahora entre los puntos A y B. En virtud de estos supuestos espresarán CD, AC, CB respectivamente la velocidad comun de los dos cuerpos despues del choque, la velocidad perdida por el cuerpo A, y la velocidad ganada por el cuerpo B. Esto es evidente.

223 *En el choque de los cuerpos elásticos que caminan ácia una misma direccion, ó que ván al encuentro uno de otro, la velocidad que pierde el cuerpo chocante es dupla de la que hubiera perdido si no hubiera habido elasticidad, y la velocidad que gana el cuerpo chocado, ácia la direccion del cuerpo chocante, es dupla de la que hubiera ganado, si no hubiera habido elasti-*

ticidad. Esta proposicion es fundamental. Fig.

Antes de probarla, prevenimos que por cuerpo chocante entendemos en el primer caso el que tiene mayor velocidad, y anda tras del otro; por cuerpo chocado el que tiene menos velocidad, y vá delante; en el segundo caso llamamos cuerpo chocante al que tiene mayor cantidad de movimiento, y cuerpo chocado al que la tiene menor.

Quando el cuerpo chocante alcanza al cuerpo chocado, le empuja, y los resortes ó partes elásticas se comprimen ó contraen hasta que ambos cuerpos tengan una misma velocidad ácia la direccion del cuerpo chocante. Entonces cesan la accion y reaccion de los cuerpos, y los resortes se aflojan ó restituyen á su primer lugar con la misma fuerza que los comprimió. Hay, pues, aquí dos causas de todo punto iguales, la compresion y restitucion de los resortes que por consiguiente han de producir cada una en particular efectos iguales en cada uno de los dos cuerpos respectivamente.

Pero 1.° La fuerza con que el cuerpo chocante le dá al cuerpo chocado, y comprime los resortes, le hace perder al cuerpo chocante cierta velocidad conforme hemos visto: á mas de esto, la restitucion de los resortes es tambien contraria á la direccion primitiva del mismo cuerpo, pues habiendo sido comprimidos los resortes de la izquierda á la derecha, y de la derecha á la izquierda en virtud de la accion y reaccion de los dos cuerpos, se restituyen de la derecha á la izquierda, y de la izquierda á la dere-

Fig. cha, así que se hallan libres. Por consiguiente el cuerpo chocante ha de perder una velocidad dupla de la que hubiera perdido, si no hubiera hecho mas que chocar con el otro cuerpo, y no hubiera habido elasticidad ó resortes.

2.° El cuerpo chocado debe en virtud del choque ganar cierta velocidad en la direccion del cuerpo chocante; y como la restitucion de los resortes obra respecto de este cuerpo ácia la direccion primitiva del cuerpo chocante; es preciso que el cuerpo chocado gane ácia la direccion del cuerpo chocante una velocidad dupla de la que hubiera ganado, si no hubiera habido resortes.

Reparemos de camino que el efecto del choque es el mismo, ora sean elásticos ambos cuerpos, ora sea elástico el uno, y el otro duro. Pero para mayor brevedad los supondremos ambos elásticos.

224 Supongamos ahora dos cuerpos elásticos A y B
65. que se mueven con la circunstancia de que A vá á chocar con B que camina delante. Llamemos respectivamente V y v las velocidades de los dos cuerpos antes del choque, é y y z sus velocidades despues del choque. Si estos cuerpos no tuvieran resortes, la velocidad perdida por A en virtud del choque, sería $\frac{B(V-v)}{A+B}$, y la velocidad ganada por B sería $\frac{A(V-v)}{A+B}$ (217); luego en virtud de lo dicho (223) la velocidad que A pierde en este caso es $\frac{2B(V-v)}{A+B}$, y la velocidad ganada por B es ahora $\frac{2A(V-v)}{A+B}$; pero la velocidad de A despues del choque es evidentemente la que tenia antes del choque, menos la que ha perdido en el choque,

que, y la velocidad de *B* despues del choque es la que tenía antes del choque, mas la que ha ganado en el choque. Fig.
Tenemos, pues, $y = V - \frac{2B(V-v)}{A+B} = \frac{AV-BV+2Bv}{A+B}$, $z = v + \frac{2A(V-v)}{A+B} = \frac{2AV-Av+Bv}{A+B}$.

225 Representen *AD* y *BD* las velocidades de los dos cuerpos antes del choque, y sea *C* el centro de gravedad de dichos cuerpos puestos en *A* y *B*; hagamos *CE* igual y opuesta á *CD*; *EA* y *EB* espresarán respectivamente las velocidades de *A* y *B*.

Porque si no hubiera elasticidad, sería *CD* la velocidad comun á los dos cuerpos despues del choque, *AC* la velocidad perdida por el cuerpo *A*, *CB* la velocidad ganada por el cuerpo *B* (219); luego ya que la elasticidad es causa de que pierda todavía *A* una parte *AC* de velocidad, y gane *B* una parte *CB* de velocidad, es patente que despues del choque la velocidad de *A* será *EA*, y la velocidad de *B* será *EB*.

La espresion de la velocidad de *A* está diciendo que si el punto *E* estuviera entre el punto *A* y el punto *C*, el valor de *EA* sería negativo, pues siempre se ha de restar *AC* de *CD* para sacar la velocidad del cuerpo *A* despues del choque; por donde se echa de ver que dicho cuerpo, en vez de proseguir ácia adelante, volveria ácia atrás.

226 Si los dos cuerpos elásticos *A* y *B* caminasen al encuentro uno de otro; llamaremos V y v respectivamente las velocidades de *A* y *B* antes del choque. Supongamos AV mayor que Bv, y llamemos y y z las 66.

Fig. velocidades de A y B despues del choque ácia la direccion de V. Sentado esto, si los dos cuerpos no tuvieran elasticidad, la velocidad perdida por A sería $\frac{B(V+v)}{A+B}$, y la velocidad ganada por B sería $\frac{A(V+v)}{A+B}$ (221); luego, por razon de la elasticidad, la velocidad perdida por A será $\frac{2B(V+v)}{A+B}$, y la velocidad ganada por B será $\frac{2A(V+v)}{A+B}$ (223). Y como la velocidad de A despues del choque es evidentemente la que tenia antes del choque, menos la que ha perdido en el choque, y la velocidad de B despues del choque en la direccion de V, es la que ha ganado ácia la misma direccion, menos la velocidad v que tenia ácia una direccion contraria; será $y = V - \frac{2B(V+v)}{A+B} = \frac{AV-BV-2Bv}{A+B}$, $z = \frac{2A(V+v)}{A+B} - v = \frac{2AV+Av-Bv}{A+B}$.

66. 227 Dividamos la recta AB en dos partes AD, BD proporcionales á las velocidades de los dos cuerpos A y B antes del choque, y despues de determinado el centro de gravedad C de los mismos dos cuerpos que supondremos puestos en A y B, haremos $CE = CD$; será entonces EA la espresion de la velocidad de A despues del choque, y EB la espresion de la velocidad de B.

Esta construccion se demuestra del mismo modo que la de arriba (225), y tambien se echa de ver aquí que si el punto E estuviese entre los puntos A y B, el cuerpo A en vez de proseguir caminando ácia la direccion AB despues del choque, volverá ácia atrás. Por lo que mira al cuerpo B, proseguirá caminando despues del choque ácia la direccion AB, porque suponemos que este cuerpo tiene me-

menos cantidad de movimiento que el cuerpo *A*. Fig.

228 Las fórmulas que acabamos de sacar para el choque de los cuerpos ya duros, ya elásticos, pueden aplicarse de una infinidad de modos, segun variaren las relaciones que supusiéremos entre las masas, las velocidades ó cantidades de movimiento &c. de los cuerpos.

Algunas aplicaciones del Choque de los cuerpos duros, y consecuencias que de él se infieren respecto de la Percusion.

229 Las reglas que hemos sentado acerca del choque de los cuerpos duros, se verifican, sea que los cuerpos se choquen inmediatamente, conforme hemos supuesto, sea que se empugen por medio de una varilla, que junte sus centros de gravedad, sea que finalmente tire uno de otro por medio de un hilo, con tal que la accion se comunique inmediatamente al centro de gravedad de cada uno.

Por egemplo, si dos cuerpos *A* y *B* tiran uno de 67.
otro por medio de un hilo que pase por una polea *P*, y queremos determinar el movimiento que adquirirán en virtud de su pesantez; consideraremos (43) que la pesantez procura comunicar cada instante á cada uno de dichos dos cuerpos una velocidad igual. Pero como no se puede mover el uno sin llevar tras sí al otro, los dos cuerpos se hallan cada vez que la pesantez vuelve á impelerlos, en el mismo caso que si cada uno tirase del otro con velocidades iguales ácia direcciones directamente opuestas; luego (220)

 pa-

Fig. para determinar la velocidad que de esto resultará hemos de tomar, llamando g la velocidad que la pesantez comunica cada instante á un cuerpo libre, la diferencia $Ag - Bg$ de las cantidades de movimiento, y dividirla por la suma $A + B$ de las masas. Será, pues, $\frac{Ag - Bg}{A + B}$, ó $\frac{A - B}{A + B}g$ la velocidad real que cada nuevo impulso g de la pesantez añade cada instante al cuerpo A. Se echa, pues, de ver una vez que A, B y g son cantidades constantes, que el cuerpo A se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, y que la fuerza que le acelera efectivamente es á la pesantez libre :: $\frac{A - B}{A + B}g : g :: A - B : A + B$. Luego si llamamos p la velocidad que la pesantez comunica á un mobil libre en un segundo de tiempo, determinaremos la que comunica en el mismo tiempo al mobil A detenido por la accion de B, por medio de esta proporcion $A + B : A - B :: p : \frac{A - B}{A + B}p$; luego si llamamos V la velocidad de A al cabo de un número t de segundos, tendremos (39) $V = \frac{A - B}{A + B}pt$, y (39) el espacio que hubiere andado será $E = \frac{A - B}{A + B}\frac{pt^2}{2}$; con substituir (50) 30, 2 pies en lugar de p.

230 Si en el primer instante, el cuerpo B que suponemos tener una masa menor que la del otro, adquiriera una velocidad v; quiero decir, si se hallára impelido de modo que, estando libre y sin pesantez, pudiese andar en un segundo un número de pies representado por v; entonces parte del impulso se comunicaría al cuerpo A, al qual llevaría tras sí algun tiempo. Para averiguar cómo se haría

este

este repartimiento, hemos de considerar que como en el primer instante la accion de la pesantez es infinitamente pequeña ó nula, el cuerpo B animado de la velocidad v, obra en el cuerpo A, como si este estuviera en reposo. Luego para determinar la velocidad residua despues de la accion, es menester (218) dividir la cantidad de movimiento Bv por la suma de las masas; de donde resultará $\frac{Bv}{A+B}$ que será la velocidad con que B llevaría tras sí al cuerpo A, si no obrase la pesantez en los instantes siguientes. Pero como acabamos de ver que obra esta fuerza de manera que comunica al cuerpo A en el tiempo t una velocidad $= \frac{A-B}{A+B} pt$ ácia una direccion contraria; se infiere que al cabo del tiempo t no le quedará al cuerpo B mas que la velocidad $\frac{Bv}{A+B} - \frac{A-B}{A+B} pt$. Por donde se echa de ver que por pequeño que sea B, por pequeña que sea la velocidad v, y por grande que sea A, siempre B llevará tras sí al cuerpo A algun espacio de tiempo, y despues vencerá A, y llevará tras sí al cuerpo B. Fig.

Porque sea la que fuere la cantidad de movimiento Bv que se le comunica á B, es evidente que mientras tuviere algun valor finito, siempre se necesitará para gastarla que la pesantez obre algun tiempo, una vez que no obra sino por grados infinitamente pequeños cada instante.

Si queremos saber al cabo de quánto tiempo dejará A de subir, lo conseguiremos practicando lo siguiente. Llamemos T el tiempo que necesitaría un cuerpo pesado, que cayese libremente, para adquirir la velocidad v. Por lo dicho (50) será $v = pT$; luego la velocidad de B se

Fig. transforma en $\frac{BpT}{A+B} - \frac{A-B}{A+B}pt$, que despues de igualada con cero dá $BpT = (A - B)\,pt$; de donde sacaremos $t = \frac{BT}{A-B}$. Si la velocidad u que se le ha dado al cuerpo fuese, por egemplo, la que un cuerpo pesado adquiriría en un segundo de tiempo; será $T = 1''$; supongamos $A =$ 100 libras, $B = 1$ libra. Será $t = \frac{1''}{99}$; quiero decir, que el cuerpo B no llevará tras sí á A, sino por espacio de un 99^mo de segundo.

Se echa, pues, de ver que no hay fuerza alguna finita, por mas pequeña que sea, que no pueda vencer el peso de un cuerpo; y que nunca es posible poner en equilibrio un cuerpo que actualmente se mueve con el peso de otro cuerpo, esto es, con un cuerpo que no tuviera mas que la propension, tendencia ó impulso de la pesantez. El primero llevará desde luego trás sí al otro, pero este llevará despues trás sí al primero: habrá en realidad un instante de reposo, y será el instante en que el primero hubiere perdido toda la velocidad comunicada, y no será mas que un instante.

231 Por consiguiente la fuerza de los cuerpos que se mueven no se puede medir con pesos; quiero decir por medio de la accion sola de pesos destituidos de movimiento local; solo puede medirse por medio de otras fuerzas de cuerpos que se muevan; por egemplo, por la fuerza de cuerpos graves caidos de cierta altura. Así, si quisiéramos formar juicio de la fuerza de un cuerpo de tres libras que se moviese con una velocidad de 60 pies por segundo; buscaríamos en virtud de lo dicho (54) de qué altura un

un cuerpo pesado ha de caer para adquirir una velocidad de Fig.
6 0 pies por segundo; y hallaríamos que es de 5 9 pies y medio con corta diferencia. Inferiríamos, pues, que un cuerpo de tres libras, animado de una velocidad de 6 0 pies por segundo, ha de dar el mismo golpe que si cayera de 5 9 pies y medio de altura.

2 3 2 La fuerza que pueden hacer los cuerpos que se mueven, se llama *Percusion.*

No puede, pues, compararse de ningun modo la fuerza de percusion con la simple presion; esto es, con la fuerza ó conato que puede hacer con su peso una masa sin movimiento local. Un golpe de martillo, aunque debil, introducirá un clavo en un cuerpo, y un peso muy grande no lo conseguirá; lo propio digo de un cuerpo de masa mediana que hubiese adquirido cayendo alguna velocidad.

Procede esta diferencia de que este último gasta en un solo instante todos los grados de velocidad que ha adquirido mientras caía. Pero el peso no hace mas que comprimir, no los adquiere sino succesivamente, y los reparte á un tiempo entre el clavo y la masa que le circunda; y como cada uno de estos grados es infinitamente pequeño, se pierde en el mismo instante que se adquiere.

2 3 3 En virtud de lo que acabamos de decir podremos declarar lo que se debería practicar para determinar el movimiento de un cuerpo *A*, que con su peso llevase trás sí el cuerpo *B* puesto encima de un plano orizontal sin rozamiento. Como la accion que la pesantez egerce en *B* 68.

la

Fig. la destruye el plano orizontal, la que egerce en A se reparte entre A y B, del mismo modo que quando un cuerpo obra en otro que está en reposo. Por consiguiente, discurriendo del mismo modo que antes, y llamando g la velocidad que la pesantez comunica en un instante á un cuerpo libre, será $\frac{gA}{A+B}$ la velocidad con que A acelerará con efecto su movimiento. Luego su velocidad al cabo de un segundo de tiempo será $\frac{Ap}{A+B}$, siendo p la que logra en un segundo de tiempo un cuerpo qualquiera á impulsos de su pesantez; luego al cabo de un tiempo t, su velocidad será $\frac{pAt}{A+B}$, y el espacio que hubiere andado será $\frac{\frac{1}{2}pAt^2}{A+B}$.

234 Si los dos cuerpos A y B tirasen uno de otro
67. por medio de una cuerda uniformemente pesada; la fuerza aceleratriz de A no sería en este caso una fuerza constante; pero tambien se podría determinar igualmente que el movimiento de A. Sea c lo que coge de largo toda la cuerda; P, su gravedad específica, ó lo que pesa un pie de dicha cuerda; sea x lo que coge de largo la parte PA; será $PB = c - x$. Luego la masa de PA será Px, y la de PB será $P(c - x)$. Por consiguiente tenemos por una parte una masa $= A + Px$; y por otra una masa $= B + P(c - x)$ á cada una de las quales la pesantez comunica en el instante actual, la velocidad infinitamente pequeña b. Luego para averiguar qué velocidad lograrán á impulsos de su accion recíproca, hemos de dividir la diferencia de las cantidades de movimiento por la suma de

las

las masas. Luego la espresion de la aceleracion de A será Fig.
$\frac{Ah+Phx-Bh-P(c-x)h}{A+Px+B+P(c-x)}$, que se reduce á $\frac{Ah-Bh+2Phx-Pch}{A+B+Pc}$, ó á $\frac{ah+2Phx}{b}$, con hacer $A-B-Pc=a$, y $A+B+Pc=b$. Luego esta velocidad tiene con la velocidad b de la pesantez la misma razon que $\frac{a+2Px}{b}$ con 1; luego si llamamos p la velocidad que la pesantez comunica á un cuerpo libre en un segundo de tiempo, $\frac{a+2Px}{b}p$ será la que adquiriría A en un segundo, si mientras dura este segundo, se mantuviera constante la fuerza aceleratriz. Hemos, pues, de substituir dicha cantidad (59) en lugar de p en la fórmula $pdt=d\left(\frac{de}{dt}\right)$, que pertenece (62) á los movimientos variados; y al mismo tiempo substituiremos dx en lugar de de, porque sea el que fuere el punto desde donde empezó á moverse A, el espacio que anda cada instante, es igual al aumento dx de la longitud de PA. Tendremos, pues, $\frac{a+2bx}{b}pdt=d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Para integrar esta equacion, divido por dt, y multiplico por dx; resultará $\frac{adx+2bxdx}{b}p=\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, cuya integral es $\frac{ax+Px^2}{b}p+C=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Para determinar la constante C, considero que $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad (57). Luego si suponemos que al principio del movimiento, A estaba en O, siendo $PO=b'$, y que no haya recibido ningun impulso, es preciso que la constante C sea tal, que la velocidad sea cero quando $x=b'$; tendremos, pues, $\frac{ab'+Pb'^2}{b}p+C=0$, y por consiguiente $C=\frac{-ab'-Pb'^2}{b}p$; luego $\frac{ax+Px^2-ab'-Pb'^2}{b}p=\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Llamemos z el espacio andado OA; será $z=x-b'$, ó $x=b'+z$, y $dx=dz$,

con

Fig. con esto se transforma nuestra equacion en $\frac{az+2Pb'z+Pz^2}{b}p = \frac{\frac{1}{2}dz^2}{dt^2}$, de donde se saca $dt = \frac{dz\sqrt{\frac{b}{2p}}}{\sqrt{[(a+2Pb')z+Pzz]}}$, cuya equacion se integrará facilmente haciendo que sea racional en virtud de lo dicho (III. 640), y conoceremos la razon entre el espacio, y el tiempo, que segun suponemos se cuenta por segundos.

Por lo que mira á la velocidad, una vez que (57) su espresion es $\frac{dz}{dt}$; si la llamamos v, tendremos $v = \frac{\sqrt{[(a+2Pb')z+Pzz]}}{\sqrt{\frac{b}{2p}}}$, siendo v lo que el cuerpo puede andar cada instante en un segundo, en virtud de su movimiento actual continuado uniformemente.

Del Choque indirecto de los cuerpos.

69. 235 *Si un cuerpo duro* A *choca oblicuamente un cuerpo duro* B *que está en reposo, la velocidad del cuerpo* A *tendrá con la velocidad del cuerpo* B, *despues del choque, la misma razon que el seno total con el coseno del ángulo que forman una con otra las direcciones de las dos velocidades.*

Sea HAF la direccion del cuerpo A antes del choque. Es evidente que se hace la percusion en el instante que la distancia A y B á que están uno de otro los centros de los dos cuerpos propuestos, es igual á la suma de los radios de dichos cuerpos, que supondremos esféricos,

Tam-

Tambien se echá de ver que *AB* será la direccion del Fig. cuerpo *B* despues del choque. Sea *EA* la direccion del cuerpo *A* tambien despues del choque, y supongamos que en la duracion instantanea de la percusion los dos cuerpos *A* y *B* anden los espacios infinitamente pequeños *Aa*, *Bb*. Tírese la recta *ab*: será *ab* = *AB*, pues los dos cuerpos se tocan al andar *Aa*, *Bb*. Desde el punto *b* como centro, y con el radio *bA* trácese el arco infinitamente pequeño *Am*, entre los lados *bA*, *bam* del ángulo infinitamente pequeño *Abm*. Si restamos la equacion *BA* = *ba* de la equacion *bA* = *bm*, sacaremos *Bb* = *am*. Sentado esto, del triángulo *amA* rectángulo en *m*, que podemos considerar como rectilíneo por razon de su pequeñez, inferiríamos esta proporcion *Aa* : *am* :: sen tot : sen *aAm*, ó porque el ángulo *aAm* es complemento del ángulo *BAE*, *Aa* : *Bb* :: sen tot : cos *BAE*. Pero *Aa* y *Bb* son las velocidades de los dos cuerpos en el instante que se acaba el choque, y por consiguiente sus velocidades despues del choque. Luego la velocidad del cuerpo *A* despues del choque es á la velocidad del cuerpo *B*, como el seno total es al coseno del ángulo que forman una con otra las direcciones de las dos velocidades.

236 Determinemos ahora las velocidades de dos 70. cuerpos duros *A* y *B* despues del choque; en el supuesto de que el cuerpo *A* choque oblicuamente al cuerpo *B* que se está quieto.

Supondremos que en el instante del choque se tire des-

Fig. desde el centro del cuerpo A al centro del cuerpo B una linea AB; esta linea será la direccion del cuerpo B despues del choque. Sea AF la velocidad del cuerpo A antes del choque, y AE su velocidad despues del choque. Esta última velocidad es incógnita, y su direccion forma con AF un ángulo EAF que tampoco conocemos. Tírese la EF, y conclúyase el paralelogramo $AHFE$. Es patente que AH ó FE representará la velocidad que perdiere el cuerpo A en el choque. Resolvamos AH en otras dos velocidades AL, AG tales que la una se dirija ácia AF, y la otra sea perpendicular á AF. Tomemos en AB la parte AM para que represente la velocidad del cuerpo B, y resolvamos esta velocidad en otras dos AN, AO tales que la una se dirija por la recta AF, y la otra sea perpendicular á AF.

Sentado esto, una vez que hay igualdad entre el movimiento perdido ácia una direccion, y el movimiento ganado ácia la misma direccion (212), tendremos estas dos equaciones (A) $A \times AL = B \times AN$; (B) $A \times AG = B \times AO$.

Hagamos el seno total 1; llamemos a el ángulo BAF, esto es, el arco trazado con el radio 1, que es la medida de dicho ángulo; el ángulo FAE, z; AF, V; AE, x. Las dos cantidades x y z son incógnitas, y las demás conocidas.

Desde el punto E bajaremos la EK perpendicular á AF; será EK ó $AG = AE \times$ sen $FAE = x$ sen z, AK =

$= AE \times \cos FAE = x . \cos z$, KF ó $AL = AF - AK$ Fig. $= V - x . \cos z$.

Por ser el ángulo $BAE = BAF + FAE$, será $\cos BAE = \cos a \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z$ (I. 656); pero (235) $AM = AE . \cos BAE$; luego $AM = x (\cos a . \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z)$.

Finalmente tendremos $AN = AM . \cos BAF$, MN ó $AO = AM \times \text{sen}\, BAF$; luego

$$AN = x . \cos a (\cos a . \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z);$$

$$AO = x . \text{sen}\, a (\cos a . \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z).$$

Por consiguiente los dos equaciones (A) y (B) se podrán transformar en estas dos.

$$(C) \quad AV - Ax . \cos z = Bx . \cos a (\cos a . \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z)$$

$$(D) \quad Ax . \text{sen}\, z = Bx . \text{sen}\, a (\cos a . \cos z - \text{sen}\, a . \text{sen}\, z)$$

De la equacion (D) se saca $(A + B \,\text{sen}^2 A) \,\text{sen}\, z = B . \text{sen}\, a . \cos a . \cos z$; y por ser $\cos z = \sqrt{(1 - \text{sen}^2 z)}$, sacaremos, despues de substituir este valor de $\cos z$ y despejar, $\text{sen}\, z = \frac{B . \text{sen}\, a \cos a}{\sqrt{[(A + B . \text{sen}^2 a)^2 + (B \,\text{sen}\, a . \cos a)^2]}}$; luego $\cos z = \frac{A + B . \text{sen}^2 a}{\sqrt{[(A + B . \text{sen}^2 a)^2 + (B . \text{sen}\, a . \cos a)^2]}}$.

Si comparamos una con otra las dos equaciones (C) y (D) sacaremos

$$x = \frac{V \,\text{sen}\, a}{\text{sen}\, a . \cos z + \cos a . \text{sen}\, z} = \frac{V \,\text{sen}\, a \sqrt{[(A + B \,\text{sen}^2 a)^2 + (B \,\text{sen}\, a . \cos a)^2]}}{\text{sen}\, a (A + B . \text{sen}^2 a) + \cos a (B \,\text{sen}\, a . \cos a)},$$

pero por ser $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, el denominador del último quebrado $= \text{sen}\, a . A + \text{sen}\, a . B$; luego reduciendo sacaremos $x = \frac{V \sqrt{[(A + B . \text{sen}^2 a)^2 + (B \,\text{sen}\, a . \cos a)^2]}}{A + B}$.

Conocemos, pues, la velocidad AE del cuerpo A despues del choque, su cantidad y direccion, pues conocemos

Fig. igual fuerza, y ácia la misma direccion que fueron comprimidos.

71. En virtud de este principio es evidente que si prolongamos FE hasta que $Fe = 2FE$, tiramos Ae, y tomamos el duplo de Ap; las lineas Ae y $2Ap$ espresarán las velocidades de los dos cuerpos A y B en el caso actual; porque las lineas FE, Ap espresan respectivamente la velocidad perdida por el cuerpo A, y la velocidad ganada por el cuerpo B, en el caso de estár sin resorte los dos cuerpos.

De esta resolucion se puede inferir una consecuencia parecida á la que sacamos de la proposicion probada antes (238).

240 Si quisiéramos determinar la velocidad con que hán de caminar despues del choque un número qualquiera de
72. cuerpos duros B, C, D, chocados á un tiempo oblicuamente por otro cuerpo duro A; tiraríamos en el instante del choque lineas desde el centro del cuerpo A á los centros de los cuerpos B, C, D; y las lineas AB, AC, AD serían las direcciones de las velocidades de los cuerpos B, C, D despues del choque. Sea AF la velocidad del cuerpo A antes del choque; AE su velocidad despues del choque; FAE el ángulo que forman las direcciones AF, AE; tiremos la FE, y concluyamos el paralelogramo $AHFE$. Es patente que AH es la velocidad perdida por el cuerpo A despues del choque. Sean AM, AP, AS las velocidades de los cuerpos B, C, D despues del choque, y resuelvase cada una

de

de todas las velocidades AH, AM, AP, AS en otras dos AL, AG; AN, AO; AQ, AR; AT, AV, tales que las primeras se dirijan ácia AF, y las otras sean perpendiculares á AF.

Sentado esto es evidente que el movimiento perdido en la direccion AF es $A \times AL$, y que el movimiento ganado en la misma direccion es $B \times AN + C \times AQ + D \times AT$; tendrémos (212), pues, la equacion

$$(A)\quad A \times AL = B \times AN + C \times AQ + D \times AT.$$

Es tambien evidente que el movimiento perdido en la direccion AO es $A \times AG$, y que el movimiento ganado en la misma direccion es $B \times AO - C \times AR - D \times AV$; luego tendremos (212)

$$(B)\quad A \times AG = B \times AO - C \times AR - D \times AV.$$

Llamemos ahora el seno total 1; el ángulo BAF, a; el ángulo CAF, b; el ángulo DAF, c; el ángulo FAE, z; AF, V; AE, x.

Bajemos EK perpendicular á AF; será EK ó $AG = x \cdot \text{sen}\, z$, $AK = x \cdot \cos z$, EK ó $AL = V - x \cdot \cos z$.

Por ser el ángulo BAE la suma de los dos ángulos BAF, FAE, el ángulo CAE la diferencia de los ángulos CAF, FAE, y el ángulo DAE la diferencia de los ángulos DAF, FAE, será (I. 656)

$$\cos BAE = \cos a \cdot \cos z - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, z;$$
$$\cos CAE = \cos b \cdot \cos z + \text{sen}\, b \cdot \text{sen}\, z;$$
$$\cos DAE = \cos c \cdot \cos z + \text{sen}\, c \cdot \text{sen}\, z.$$

Pero (235) $AM = AE \times \cos BAE$, $AP = AE \times$

 cos

Fig. cos CAE, $AS = AE \times \cos DAE$; luego $AM = x(\cos a . \cos z - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} z)$, $AP = x(\cos b . \cos z + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} z)$, $AS = x(\cos c . \cos z + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} z)$. A mas de esto, tambien tenemos $AN = AM \times \cos BAF$, $AO = AM \times \operatorname{sen} BAF$; $AQ = AP \times \cos CAF$, $AR = AP \times \operatorname{sen} CAF$; $AT = AS \times \cos DAF$, $AV = AS \times \operatorname{sen} DAF$. Luego

$$AN = x \cos a (\cos a . \cos z - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} z),$$
$$AO = x \operatorname{sen} a (\cos a . \cos z - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} z);$$
$$AQ = x \cos b (\cos b . \cos z + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} z),$$
$$AR = x \operatorname{sen} b (\cos b . \cos z + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} z);$$
$$AT = x \cos c (\cos c . \cos z + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} z),$$
$$AV = x \operatorname{sen} c (\cos c . \cos z + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} z).$$

Por consiguiente podremos transformar las equaciones (A) y (B) en estotras dos

$$(C)\quad AV - Ax \cos z = \begin{cases} Bx \cos a (\cos a . \cos z - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} z) \\ + Cx \cos b (\cos b . \cos z + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} z) \\ + Dx \cos c (\cos c . \cos z + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} z), \end{cases}$$

$$(D)\quad Ax \operatorname{sen} z = \begin{cases} Bx . \operatorname{sen} a (\cos a . \cos z - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} z) \\ - Cx . \operatorname{sen} b (\cos b . \cos z + \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} z) \\ - Dx . \operatorname{sen} c (\cos c . \cos z + \operatorname{sen} c . \operatorname{sen} z). \end{cases}$$

Si comparamos la equacion (D) con las equaciones $\operatorname{sen} z = \sqrt{(1 - \cos^2 z)}$, $\cos z = \sqrt{(1 - \operatorname{sen}^2 z)}$, que siempre se verifican, y despejamos succesivamente sen z y cos z, sacaremos

$$\text{sen}\, z = \frac{B\,.\,\text{sen}\, a\,.\,\cos a - C\,.\,\text{sen}\, b\,.\,\cos b - D\,.\,\text{sen}\, c\,.\,\cos c}{\sqrt{\left\{\begin{matrix}(A + B\,.\,\text{sen}^2 a + C\,.\,\text{sen}^2 b + D\,.\,\text{sen}^2 C)^2 + \\ (B\,.\,\text{sen}\, a\,.\,\cos a - C\,.\,\text{sen}\, b\,.\,\cos b - D\,.\,\text{sen}\, c\,.\,\cos c)^2\end{matrix}\right\}}};$$

$$\cos z = \frac{A + B\,.\,\text{sen}^2 a + C\,.\,\text{sen}^2 b + D\,.\,\text{sen}^2 C}{\sqrt{\left\{\begin{matrix}(A + B\,.\,\text{sen}^2 a + C\,.\,\text{sen}^2 b + D\,.\,\text{sen}^2 c)^2 \\ (B\,.\,\text{sen}\, a\,.\,\cos a - C\,.\,\text{sen}\, b\,.\,\cos b - D\,.\,\text{sen}\, c\,.\,\cos c)^2\end{matrix}\right\}}}$$

Es, pues, conocida la direccion del cuerpo A despues del choque. Si substituimos los valores de sen z y cos z en la equacion

$$x = \frac{AV}{\left\{\begin{matrix}(A + B\,.\,\cos^2 a + C\,.\,\cos^2 b + D\,.\,\cos^2 c)\cos z \\ -(B\,.\,\text{sen}\, a\,.\,\cos a - C\,.\,\text{sen}\, b\,.\,\cos b - D\,\text{sen}\, c\,.\,\cos c)\,\text{sen}\, z\end{matrix}\right\}}$$

que se saca de la equacion (C), tendremos la cantidad de la velocidad x del mismo cuerpo A despues del choque. Finalmente se conocerán tambien las velocidades AM, AP, AS de los cuerpos B, C, D, una vez que conocemos AE, y los ángulos BAE, CAE, DAE.

El que quisiere egecutar las operaciones que acabamos de indicar, deberá tener presente que $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, $\text{sen}^2 b + \cos^2 c = 1$, $\text{sen}^2 c + \cos^2 c = 1$, y simplificará mucho los cálculos.

241 Bagemos ahora desde el punto F á las rectas 73.
AB, AC, AD las perpendiculares Ff, Fq, Fx. Determinemos el centro de gravedad m del systema de todos los

Fig. cuerpos A, B, C, D que supondremos puestos respectivamente en A, f, q, x, y por los puntos m, F tiremos la recta mF. Levantemos en el punto m la recta md perpendicular á mF. Tírese AX paralela á mF, y en el punto F la FX perpendicular á AF; dividamos la linea AX en E de modo que sea $A \times AF + (A + B + C + D)\, Ad : A \times AF :: AX : AE$, ó $AE = \frac{A \times AF \times AX}{A \times AF + (A + B + C + D) \times Ad}$.

Finalmente desde el punto F tiremos á las AB, AC, AD las perpendiculares Ep, Eu, Eo. Será AE la velocidad del cuerpo A despues del choque; Ap, Au, Ao serán las de los cuerpos B, C, D.

Porque si por el punto A tiramos la recta by perpendicular á AF, y desde los puntos m, f, q, x tiramos las perpendiculares mn, mg; ft, fb; qs, qr; xz, xy á los dos eges AF, by, de la propiedad del centro de gravedad (108) inferiremos

$$mn = \frac{B \times ft - C \times qs - D \times xz}{A + B + C + D} = \frac{V(B.\,\text{sen}\,a.\cos a - C.\,\text{sen}\,b.\cos b - D.\,\text{sen}\,c.\cos c)}{A + B + C + D};$$

$$mg \frac{B \times fb + C \times qr + D \times xy}{A + B + C + D} = \frac{V(B.\cos^2 a + C.\cos^2 b + D.\cos^2 c)}{A + B + C + D};$$

luego $$Fn = V - \frac{V(B\cos^2 a + C\cos^2 b + D\cos^2 c)}{A + B + C + D}$$

$$= \frac{V(A + B + C + D - B.\cos^2 a - C.\cos^2 b - D.\cos^2 c)}{A + B + C + D}$$

=

$$= \frac{V(A + B.\,\text{sen}^2 a + C.\,\text{sen}^2 b + D.\,\text{sen}^2 c)}{A + B + C + D};$$ Fig.

$$Fm = \frac{V \sqrt{\left\{\begin{matrix}(A + B.\,\text{sen}^2 a + C.\,\text{sen}^2 b + D.\,\text{sen}^2 c)^2 + \\ (B.\,\text{sen}\,a.\cos a - C.\,\text{sen}\,b.\cos b - D.\cos c.\,\text{sen}\,c)^2\end{matrix}\right\}}}{A + B + C + D}.$$

Por consiguiente sen mFn = sen $FAE = \frac{mn}{Fm}$

$$= \frac{B.\,\text{sen}\,a.\cos a - C.\,\text{sen}\,b.\cos b - D.\,\text{sen}\,c.\cos c}{\sqrt{\left\{\begin{matrix}A + B.\,\text{sen}^2 a + C.\,\text{sen}^2 b + D.\,\text{sen}^2 c)^2 + \\ (B.\,\text{sen}\,a\cos a - C.\,\text{sen}\,b\cos b - D.\,\text{sen}\,c\cos c)^2\end{matrix}\right\}}}.$$

Luego 1.° AX es la direccion de la velocidad del cuerpo A despues del choque. 2.° Los dos triángulos rectángulos Fnm, Fmd dán $Fn : mn :: mn : nd = mn \times \frac{mn}{Fn} = mn \times \frac{\text{sen}\,z}{\cos z} = \frac{V\,\text{sen}\,z}{\cos z}\left(\frac{B\,\text{sen}\,a\cos a - C\,\text{sen}\,b.\cos b - D\,\text{sen}\,c\cos c}{A + B + C + D}\right)$; y por consiguiente $Ad = An - nd$

$$= \frac{\left\{\begin{matrix}V(B.\cos^2 a + C.\cos^2 b + D.\cos^2 c) - \frac{V\,\text{sen}\,z}{\cos z} \times \\ (B.\,\text{sen}\,a\cos a - C.\,\text{sen}\,b.\cos b - D.\,\text{sen}\,c\cos c\end{matrix}\right\}}{A + B + C + D}.$$

Y como el triángulo rectángulo AFX dá $AX = \frac{AF}{\cos z} = \frac{V}{\cos z}$, tendremos por consiguiente $AE = \frac{A \times AF \times AX}{A \times AF + (A + B + C + D) \times Ad}$

$$= \frac{AV}{\left\{\begin{matrix}(A + B\cos^2 a + C\cos^2 b + D\cos^2 c)\cos z - \\ (B\,\text{sen}\,a.\cos a - C\,\text{sen}\,b.\cos b - D\,\text{sen}\,c.\cos c)\,\text{sen}\,z\end{matrix}\right\}}.$$

Luego será AE la velocidad del cuerpo A despues del

Fig. del choque. Finalmente es constante que Ap, Au, Ao son las velocidades de los cuerpos B, C, D, una vez que $Ap = AE \times \cos BAE$, $Au = AE \times \cos CAE$, $Ao = AE \times \cos DAE$.

74. 242 Aplicaremos la resolucion general que hemos dado á un caso particular, suponiendo que el cuerpo A choca no mas que con dos cuerpos B y C iguales y puestos de un mismo modo respecto de su primera direccion AF. En este supuesto será $D = 0$, sen $c = 0$, $B = C$, sen $b =$ sen a, cos $b =$ cos a; por consiguiente sen $z = 0$, y cos $z = 1$; luego despues del choque el cuerpo A proseguirá moviéndose ácia AF (como es evidente), y su velocidad AE ó $x = \frac{AV}{A + B \cos^2 a + C \cos^2 b} = \frac{AV}{A + 2B \cos^2 a}$. Por lo que mira á las velocidades iguales Ap, Au de los dos cuerpos B y C, la espresion de cada una es $\frac{AV \cos a}{A + 2B \cos^2 a}$.

243 Busquemos ahora quales serán despues del cho-
73. que las velocidades de los cuerpos A, B, C, D, en el supuesto de ser todos elásticos, y de que el cuerpo A vaya á chocar oblicuamente con los otros que están en reposo.

Determinaremos con lineas las velocidades, usando de la construccion geométrica dada antes (241).

Hagamos $Fe = 2FE$, y tiremos Ae; será Ae la velocidad del cuerpo A despues del choque, y las lineas $2Ap$, $2Au$, $2Ao$ espresarán respectivamente las velocidades de los cuerpos B, C, D. Se prueba por lo dicho (223 y 241).

74. 244 Supongamos, por egemplo, que el cuerpo A no cho-

choque mas que con dos cuerpos *B* y *C* iguales y coloca- Fig.
dos de un mismo modo respecto de su direccion. La velocidad de *A* despues del choque será $AF - 2FE$, y la de *B* ó *C* será $2Ap$.

Si quisiéramos sacar las espresiones analýticas de estas velocidades, inferiríamos de lo dicho (223 y 241) que la velocidad de *A* despues del choque $= \frac{AV - 2BV\cos^2 a}{A + 2B\cos^2 a}$, y la de *B* ó $C = \frac{2AV\cos a}{A + 2B\cos^2 a}$.

Del Movimiento por superficies curvas.

245 Si un cuerpo sin pesantez, y sin resorte anda 75.
en virtud de una impulsion primitiva, los lados succesivos *AB*, *BC* &c. de un polygono qualquiera, al pasar de un lado á otro perderá una parte de su velocidad que se determinará del modo siguiente.

Imaginemos que se mueva actualmente desde *A* ácía *B*, y que al llegar á *B* sea tal su velocidad que en un tiempo determinado, de un segundo por egemplo, anduviese la linea *BF* en *AB* prolongada, si estuviera libre. Despues de tirada en el punto *B* la *BE* perpendicular á *BC*, imaginaremos el paralelogramo rectángulo *BDFE*, cuya diagonal sea *BF*, y cuyos lados estén en las lineas *BC* y *BE*; y en lugar de figurarnos que tiene el cuerpo la velocidad *BF*, nos figuraremos que tiene juntas las dos velocidades *BD* y *BE*; pero como el lado *BC* le estorva el que siga la direccion de la velocidad *BE*, es evidente que su velocidad estará reducida á *BD*.

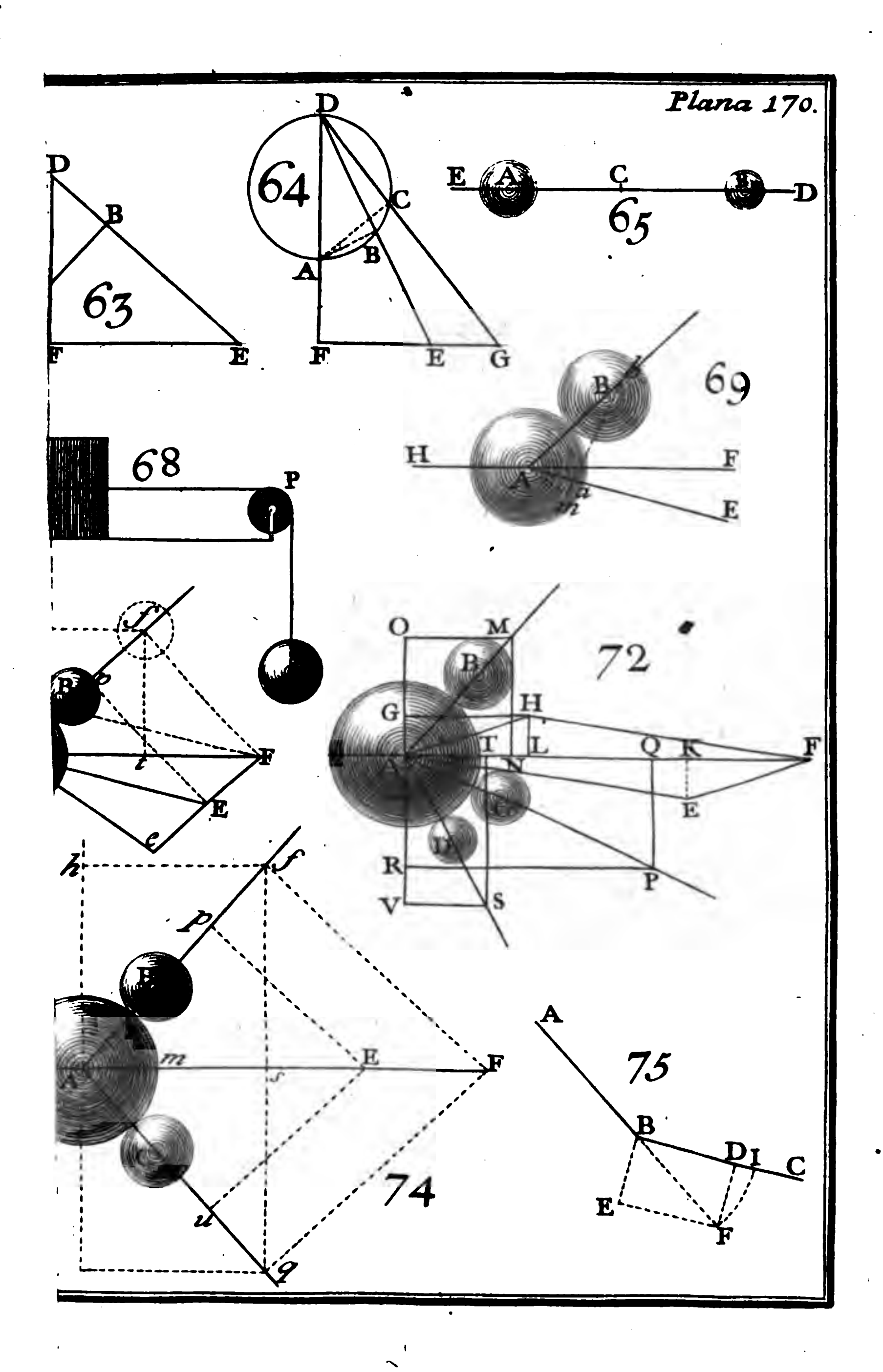
Fig. Si desde el punto *B* como centro, y con el radio *BF* imaginamos trazado el arco *FI*; será la velocidad perdida *DI* que es la diferencia que vá de *BF* á *BD*; y como *DI* es el seno verso del arco *FI*, ó del ángulo *FBC* que forman los dos lados contiguos *AB*, *BC*; se sigue que mientras estos dos lados formaren un ángulo finito, el cuerpo perderá una porcion finita de su velocidad, al pasar de un lado á otro.

246 Pero si el ángulo que forman dichos dos lados fuere infinitamente pequeño, la velocidad perdida no solo no será una cantidad finita, pero ni aun infinitamente pequeña de primer grado; no será mas que infinitamente pequeña de segundo grado.

76. Lo probaremos, si probamos que el seno verso de un ángulo infinitamente pequeño, es infinitamente pequeño de segunda orden. Para cuyo fin recordaremos que si fuere *CD* un arco qualquiera, y *BD* una perpendicular al diámetro *AC*, será (I. 474) *AB* : *BD* :: *BD* : *BC*; luego si *CD*, y por consiguiente *BD* fuese infinitamente pequeña, *BC* que es el seno verso de *CD*, será infinitamente menor que *BD*, por caber en *BD* tantas veces, quantas cabe *BD* en la cantidad infinitamente mayor *AB*. Luego será *BC* infinitamente pequeña de segunda orden.

77. 247 De donde inferiremos que *si un cuerpo sin pesantez se mueve á lo largo de la superficie curva* ABC, *tendrá en todas partes una misma velocidad.*

Porque si consideramos dicha curva como un polygo-



63
64
65
68
69
72
74
75

gono de una infinidad de lados; como estos lados forman Fig.
unos con otros ángulos infinitamente pequeños, la velocidad que se pierde al pasar de un lado á otro, es un infinitamente pequeño de segunda orden respecto de la velocidad primitiva. Luego la suma de las velocidades perdidas despues de haber andado una infinidad de dichos lados, esto es despues de andado un arco qualquiera *ABC*, no puede ser mas que una cantidad infinitamente pequeña de primera orden. Por consiguiente no mengua sensiblemente la velocidad.

248 Consideremos ahora el movimiento de los cuerpos pesados á lo largo de las superficies curvas, ciñéndonos por ahora al que se hace en un plano vertical.

Sea, pues, *AMB* la seccion de la superficie curva he- 78.
cha con un plano vertical, y el rastro que deja el cuerpo en dicha superficie. Consideremos la curva como un polygono de una infinidad de lados, é imaginemos que el cuerpo acaba de andar el pequeño lado *mM*. Como al pasar al lado *Mm* no pierde (247) nada de su velocidad, andaría *Mm* con la velocidad que tenia en *M*, si no obrase en él la gravedad. Pero como obra esta fuerza ácia la vertical *Mq* solicita otra vez el cuerpo á que baje, del mismo modo que lo haría en un plano de igual inclinacion. Luego si imaginamos que la velocidad *Mq* que procura dar la pesantez en un instante, esté resuelta en dos; es á saber, en *MS* perpendicular á *Mm*, y en *Mt* dirigida ácia *Mm*; solo esta acelerará la velocidad de *M*. Si tiramos la vertical *mr*,

y

Fig. y comparamos los triángulos semejantes Mqt, Mmr, sacaremos $Mm : mr :: Mq : Mt$; luego $Mt = \frac{Mq \times mr}{Mm}$.

Imaginemos que los diferentes puntos de la curva qualquiera AB se refieren al ege vertical qualquiera BZ. Llamemos BP, x; PM, y; el arco BM, s. Será Pp ó $mr = -dx$; $Mm = -ds$. Llevan (III. 336) estas cantidades el signo $-$, porque x y s ván menguando al paso que crece el tiempo t. Sea p la velocidad que imprime la pesantez en un cuerpo libre en un segundo; pdt será la que le comunicará en el instante dt. Será, pues, la velocidad $Mq = pdt$. Llamemos v la velocidad que tiene el cuerpo al llegar á M; dv espresará el aumento de esta velocidad en el tiempo dt; tendremos, pues, $dv = Mt$. Substituyendo estos valores en la equacion $Mt = \frac{Mq \times mr}{Mm}$, saldrá $dv = pdt \times \frac{-dx}{-ds} = pdt \times \frac{dx}{ds}$. Pero (57) $dt = \frac{-ds}{v}$; luego despues de hecha la reduccion correspondiente, $vdv = -pdx$. La integral de esta equacion es $\frac{vv}{2} = C - px$, ó $vv = 2C - 2px$.

Para determinar la constante C, supongamos que el punto A desde donde empezó á caer el cuerpo, esté mas alto que la orizontal que pasase por B, la cantidad $BZ = b$. Es, pues, preciso que quando v era cero, x fuese $= b$; luego $0 = 2C - 2pb$; luego $C = pb$; luego $vv = 2pb - 2px = 2p(b - x) = 2p \times PZ$. Pero (54) si un cuerpo pesado cayese libremente de la altura ZP, el quadrado de la velocidad que tendría en P, sería $2p \times PZ$; *luego quando un cuerpo baja á lo largo de una linea curva lue-*

qualquiera, tiene en qualquiera de sus puntos la misma velocidad que si hubiese caido libremente desde una altura igual. Fig.

Por consiguiente la velocidad que adquiere succesivamente un cuerpo que cae, á impulsos de su pesantez, en la concavidad de una linea curva, es de todo punto independiente de la naturaleza de dicha curva.

249 Luego si un cuerpo cayese á lo largo del arco *AD*, tendrá en el punto *D* la misma velocidad que si hubiese caido á lo largo de *FD*, siendo *AF* orizontal, y *CD* vertical. Por la misma razon, si cayese á lo largo del arco *BD*, tendrá en el punto *D* la misma velocidad que si hubiera caido á lo largo de *ED*. Si dejáramos caer un cuerpo succesivamente desde el punto *F*, y desde el punto *E*, tendría al llegar á *D* velocidades que serian (41) como las raices quadradas de las alturas; y si *ABD* fuese un arco de círculo, tendremos (I. 523) $\sqrt{DF} : \sqrt{DE} :: AD : BD$, siendo *AD* y *BD* las cuerdas de los arcos *ABD* y *BD*; luego las velocidades adquiridas cayendo á lo largo de los arcos qualesquiera *ABD*, *BD*, cuya tangente en el punto mas bajo es orizontal, son entre sí como las cuerdas de dichos arcos. Por consiguiente si quisiéramos que un mobil adquiriera una velocidad dupla, tripla, &c. de la que tendría en el punto *D* otro mobil que cayese á lo largo del arco *BD*, se conseguiría con hacer caer el primero á lo largo del arco *ABD*, cuya cuerda fuese dupla, tripla, &c. de la cuerda *BD*. 79.

Y si quisiéramos que adquiriera un mobil una velo-

ci-

Fig. cidad determinada como de 4 pies por segundo; se conseguiría con determinar (54) de qué altura debería caer un cuerpo para adquirir una velocidad de 4 pies por segundo, y tomando en la vertical *DC* una linea *DF* igual á dicha altura, en un punto *C* de la *DC*, tomado mas allá, se ataría un hilo tan largo como *DC*, y colgando en dicho punto el mobil, se le arrimaría al punto *A* donde la perpendicular *FA* corta el arco *DA*; partiendo el mobil del punto *A* tendría en *D* la velocidad de 4 pies por segundo.

178. 250 Luego si despues de llegado el cuerpo al punto *B* que es el mas bajo, y cuya tangente supondremos que sea orizontal, encuentra la concavidad de la misma ú otra curva qualquiera que toque la primera en *B*, subirá en esta á una altura igual á la altura de que cayó.

Porque si suponemos que el cuerpo *M* esté actualmente en *B*, donde $x = 0$, su velocidad será tal, que tendremos $vv = 2pb$, ó $VV = 2pb$, llamando V esta velocidad para distinguirla de la otra. Supongamos que con dicha velocidad suba á lo largo de una curva qualquiera BM'; discurriendo como antes hallaremos que su velocidad en un punto qualquiera M' se determinará por la equacion $-dv' = pdt \times \frac{dx}{ds'}$, llamando v' su velocidad, s' el arco AM', y reparando que v' mengua al paso que t, s', x crecen. Substituyendo, pues, en lugar de dt su valor $\frac{ds}{v'}$, tendremos $v'dv' = -pdx$; é integrando, $v'v' = 2C - 2px$; pero quando $x = 0$, la velocidad v' es V; luego $V^2 = 2C$; y como $V^2 = 2pb$, tendremos $2C = 2pb$; luego $v'v' =$

2pb

$2pb - 2px$. Pero quando el cuerpo dejare de subir, será Fig.
$v' = 0$, y por consiguiente $2pb - 2px = 0$, que dá $x = b$; luego el punto donde el cuerpo habrá llegado en la curva qualquiera BA' estará á la misma altura que el punto A.

251 Por lo que mira al tiempo que tardará el cuerpo en andar un arco qualquiera AM ó AB de la curva, una vez que $dt = \frac{-ds}{v}$, tendremos $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2pb - 2px)}}$; por manera que será menester sacar de la equacion de la curva el valor de ds en x y dx, y substituyéndole en este valor de dt, se hallará el valor de t por medio de la integracion.

Del Movimiento de Oscilacion, y de los Péndulos.

252 Acabamos de ver (250) como un cuerpo pesado despues de haber bajado á lo largo del arco qualquiera de curva AB, ha de subir (prescindiendo de la resistencia del ayre y del rozamiento) á la misma altura en la curva qualquiera BA' que tuviese en el punto B la misma tangente orizontal que BA. Luego si dicho cuerpo volviese despues á caer andaría en direccion contraria todo el camino $A'BA$, é iría y vendría sin cesar. Este es el movimiento que se llama *Movimiento de Oscilacion.* Acabamos de manifestar lo que se ha de practicar en general para determinar quanto dura cada oscilacion que ha de ser patentemente el duplo del tiempo que dura la caida por el arco AB, si fuese BA' el mismo que BA.

Quando la curva á lo largo de la qual baja el cuerpo, 80.

es

Fig. es un círculo, y se hacen las oscilaciones en arcos pequeños, tienen la propiedad singular é importante que su duracion no pende de la longitud del arco AB; por manera que quando el arco AB es pequeño, como de quatro ó cinco grados á lo mas, el mobil siempre llegará á B en el mismo tiempo, yá salga del punto A, ya de otro punto qualquiera O que esté entre A y B. Vamos á probar esta propiedad.

Guardaremos las mismas denominaciones que antes, y llamaremos a el radio BC del círculo BAD; por la naturaleza del círculo será $y = \sqrt{(2ax - xx)}$. De aquí es facil inferir que el arco ds, ó $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ es $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Pero por ser el arco BM pequeño, de modo que x es pequeña respecto de a, será xx despreciable en comparacion de $2ax$, y sacaremos $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax}}$. Si substituimos este valor de ds en el de dt (251), sacaremos $dt = \frac{-adx}{\sqrt{2ax} \times \sqrt{(2pb - 2px)}}$, que se puede reducir á $dt = \frac{-\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ap} \cdot \sqrt{(bx - xx)}}$, ó $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(bx - xx)}}$. Pero así como $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ espresa el elemento de un arco de círculo cuyo diámetro es $2a$, tambien espresa $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx - xx)}}$ el elemento de un arco de círculo cuyo diámetro sea b, y la abscisa x. Y como la linea BZ es b, si sobre BZ como diámetro trazamos el semicírculo $BM'Z$, será $M'm$ dicho elemento; de modo que tendremos $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx - xx)}} = M'm' = d(BM')$; luego $\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(bx - xx)}}$

$=$

$= \frac{d(BM')}{b}$. Substituyendo este valor en el de dt, sale $dt =$ Fig.
$\sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-d(BM')}{b}$; é integrando, $t = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$. Ya no falta sino determinar la constante C. Con esta mira consideraremos que quando $t = 0$, esto es quando el cuerpo sale del punto A, el arco BM' es la semicircunferencia $BM'Z$; luego $0 = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$, y $C = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$; luego $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b} - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$, ó $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'}{b}$. Esta es la espresion del tiempo que se gasta en andar el arco qualquiera AM, cuyo tiempo supondremos valuado en segundos. Pero quando el arco AM llega á ser el arco AB, esto es, al cabo de la semioscilacion, el arco ZM' es $ZM'B$; luego si llamamos $\frac{1}{2}T$ lo que dura la semioscilacion, tendremos $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'B}{b}$, ó $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{2ZM'B}{b}$. Pero si representa $1 : c$ la razon entre el diámetro, y la circunferencia de un círculo, tendremos $1 : c :: b : 2ZM'B$, y por lo mismo $\frac{2ZM'B}{b} = c$; luego $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times c$, ó $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Este es el valor del tiempo que dura una oscilacion entera. Y como en esta cantidad no entra b, que determina de qué altura ha bajado el cuerpo, y por consiguiente la estension del camino AB, hemos de inferir que el tiempo T de ningun modo pende de la longitud del arco, mientras este fuere pequeño. Luego *las oscilaciones que se hacen en arcos pequeños de círculo, son sensiblemente isocronas, esto es, de igual duracion.*

Esta propiedad se verifica igualmente en los arcos pequeños de todas las curvas, cuyo radio de la evoluta en el punto mas bajo no es nulo. Porque dichos arcos se confun-

Fig. den con los arcos del círculo que mide (III. 446) su curvatura.

253 Lo que acabamos de decir se aplica como de
81. suyo á los péndulos. Llámase en general *Péndulo* un hilo ó varilla que tiene uno ó muchos cuerpos colgados ó atados á un punto fijo *C*. Se llama *Péndulo simple* quando no cuelga del hilo ó varilla sin pesantez mas que una sola masa, siendo al mismo tiempo dicha masa de un diámetro muy pequeño respecto de la longitud del péndulo. Por ahora no hablamos mas que del péndulo simple.

Quando se aparta el péndulo de la situacion vertical *CB*, el impulso de la pesantez en la masa puesta en *A*, que obra ácia la vertical *AM*, no se gasta todo en mover el cuerpo, parte de él la consume el punto *C*. Hemos, pues, de concebir el impulso *AM* como resuelto en otros dos, el uno *AN* dirigido ácia *CAN* que se pierde; el otro *AP* que le dá al cuerpo el movimiento á lo largo del arco *AB*. Pero como el radio *CA* es perpendicular al arco, se echa de ver que aquí se resuelve el movimiento del mismo modo que si el cuerpo cayera naturalmente á lo largo del arco *AB*, cuyo radio es la longitud *CA* del péndulo. Luego todo quanto acabamos de decir se aplica con efecto inmediatamente á los péndulos; traheremos algunas consecuencias que resultan del cálculo precedente aplicado á los péndulos.

254 Hemos hallado (252) que una oscilacion dura el tiempo $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Luego si llamamos T' el tiempo que du-

dura la oscilacion de otro péndulo cuya longitud sea a', y cuya gravedad fuese diferente, y tal que pudiera darle la velocidad p' en un segundo, sería $T' = c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$. Luego $T : T' :: c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a'}{p'}} :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; quiero decir, que *si dos péndulos de diferente longitud son solicitados de distintas gravedades; las duraciones de las oscilaciones son como las raices quadradas de las longitudes de los péndulos, divididas por las raices quadradas de las cantidades que espresan dichas gravedades.* Fig.

255 Como es siempre una misma la gravedad en un mismo lugar, hemos de decir que *las duraciones de las oscilaciones son como las raices quadradas de las longitudes de los péndulos.*

256 Pero si un mismo péndulo fuera solicitado succesivamente de dos gravedades diferentes, como entonces a sería $= a'$, tendríamos $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}} :: \sqrt{ap'} : \sqrt{ap} :: \sqrt{p'} : \sqrt{p}$; quiero decir que las duraciones de las oscilaciones serían en razon inversa de las raices quadradas de las gravedades.

257 Sea n el número de vibraciones que hace el péndulo a en un tiempo dado, pongo por caso en una hora, ó $3600''$, será $T = \frac{3600''}{n}$. Por la misma razon, si representa n' el número de vibraciones que hace en el mismo tiempo el péndulo a', tendremos $T' = \frac{3600''}{n'}$; luego $T : T' :: \frac{3600''}{n} : \frac{3600''}{n'} :: n' : n$; esto es, que los números de vibraciones que hacen en un mismo tiempo dos péndulos de diferente longitud, son en razon inversa de las duraciones de cada vi-

Fig. bracion. Luego una vez que $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$, será $n : n' :: \sqrt{\frac{a'}{p'}} : \sqrt{\frac{a}{p}}$, y quiere decir que *los números de vibraciones que hacen en un mismo tiempo dos péndulos de diferente longitud, solicitados de diferentes gravedades, están en razon inversa de las raices quadradas de las longitudes de los péndulos divididas por las raices quadradas de las gravedades.* De suerte que si fueren unas mismas las pesanteces, los números de vibraciones serán recíprocamente como las raices quadradas de las longitudes de los péndulos; y si las longitudes fueren las mismas, los números de las vibraciones serán directamente como las raices quadradas de las gravedades.

258 Luego si un mismo péndulo llevado á diferentes parages de la tierra no hiciese en cada uno un mismo número de vibraciones en un mismo tiempo, habremos de inferir que la pesantez no será la misma en ambos parages; y el número de las vibraciones hechas en un mismo tiempo en cada lugar manifestará la diminucion ó aumento de la pesantez. Por este medio se ha comprobado que la pesantez vá menguando ácia el equador; y que vá creciendo desde el equador á los polos; muy en breve daremos la razon.

259 El principio sentado (257) de que los números de vibraciones hechas en un mismo tiempo por dos péndulos diferentes, solicitados de una misma pesantez, son recíprocamente proporcionales á las raices quadradas de las longitudes de los péndulos, puede servir para determinar la longitud del péndulo que señala los segundos en un lugar qualquie-

quiera. Despues de haber colgado de un hilo de metal muy sutil, un cuerpo que en un volumen pequeño tenga mucha materia, como una bala de plomo, de cobre, de oro, &c. se le darán al espresado hilo tres pies de largo por lo menos, medidos con el mayor cuidado; se hará oscilar este péndulo apartándole poco de la vertical, y se contará el número de oscilaciones que hiciere en un tiempo determinado y bien medido, que supondremos de una hora; despues se hará esta proporcion: 3600, número de oscilaciones que ha de hacer el péndulo que se busca, es al número de oscilaciones observado, como la raiz quadrada de la longitud del péndulo de observacion, es á un quarto término, que será la raiz quadrada de la longitud del péndulo que ha de señalar los segundos; quadrando, se hallará su longitud. Por este camino se ha averiguado que el péndulo simple que hace sus oscilaciones en un segundo en la latitud de Paris, ha de tener $3^{p}\ 0^{p}\ 8^{l},57$ de largo. Esta medida se ha determinado despues de muchos esperimentos hechos con el mayor cuidado. Fig.

260 Es facil determinar ahora de qué altura debe caer en el primer segundo de su caida un cuerpo al qual no opone el ayre una resistencia sensible en dicho tiempo. Porque la equacion $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, dá $p = \frac{acc}{TT}$, en cuyo valor p representa la velocidad que adquiere un cuerpo pesado en el primer segundo de su caída, y que es (38) dupla de la altura de que caería en dicho tiempo; a es la longitud del péndulo que hace sus oscilaciones en el tiem-

Fig. po T; por manera que si en lugar de T substituimos un segundo; a habrá de ser de $3^{p}\ 0^{p}\ 8^{l}, 57$, ó $440^{l}, 57$. Finalmente c es la razon que hay entre la circunferencia y el diámetro, y vale por consiguiente $\frac{355}{113}$; luego $p = (\frac{355}{113})^2 \times 440, 57$, cuya cantidad vale $4348^{l}, 25146$ que reducida á pies es de $30^{p}, 19619$; luego el espacio andado por un cuerpo pesado, en el primer segundo de su caída, es 15, 09809, lo mismo que ofrecimos (50) probar.

261. Si llamamos t el tiempo que necesitaría un cuerpo pesado que cae libremente, para andar el diámetro BD ó $2a$, será (52) $2a = \frac{pt^2}{2}$; luego $\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{1}{2}t$.

80. Substituyendo este valor en la equacion $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, será $T = \frac{1}{2}ct$, ó $\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}ct$, que dá $\frac{1}{2}T : t :: \frac{1}{4}c : 1$; y está diciendo que la duracion de la caída por el arco pequeño AB es al tiempo de la caída por el diámetro, como la quarta parte de la circunferencia es al diámetro. Pero la quarta parte de la circunferencia es menor que el diámetro; luego un cuerpo gasta para caer por un arco pequeño de círculo, cuya tangente inferior es orizontal, menos tiempo del que gastaría para caer á lo largo de dicho diámetro. Y como el tiempo de la caída por el diámetro es el mismo que el de la caída por una cuerda qualquiera AB (208); se echa de ver que un cuerpo llegará en menos tiempo de A á B quando cayese por el arco AB, que si cayera por la linea recta AB. Luego aunque la linea recta sea el camino mas corto, no es siempre el que se anda en menos tiempo.

Del

Fig.

Del Movimiento curvilineo en general.

262 Ya que un cuerpo que ha empezado á moverse, debe, prescindiendo de todo obstáculo, perseverar en un estado de movimiento, con la misma velocidad y direccion; se infiere que un cuerpo no puede andar una linea curva, á no ser que sobrevenga una fuerza ú obstáculo que mude á cada instante la direccion de su movimiento.

Si la fuerza que obra en el mobil ácia una direccion diferente de la que sigue, obra en intervalos de tiempo finitos, y comunica cada intervalo de tiempo una velocidad finita, el cuerpo describirá un polygono. Por egemplo, si quando el cuerpo que anda la linea *AB* ha llegado á *B*, recibe 82.
un impulso en virtud del qual pueda andar *BE* en el mismo tiempo; en lugar de andar *BD* = *AB*, como hubiera hecho si no se lo estorvára la nueva fuerza, andará la diagonal *BC* del paralelogramo *BECD*. Y si despues de llegado á *C*, donde tiene propension para andar *CG* que es igual á *BC*, y está con ella en una misma linea recta, obra en él una nueva fuerza ácia *CH*, é intenta hacer que ande *CH* en el mismo tiempo, andará realmente la diagonal *CF* del paralelogramo *CHFG*, y así prosiguiendo; por manera que en virtud de los estorvos que habrá encontrado andará los lados *AB*, *BC*, *CF* del polygono.

263 Pero si en el supuesto de haber recibido al principio una velocidad finita, la fuerza que le desvía obra sin

Fig. cesar ; ó , lo que es lo propio , obra por intervalos de tiempo infinitamente pequeños ; entonces los lados *BC* , *CF* andados cada instante , serán infinitamente pequeños ; y como las lineas *BE* , *CH* que señalan los impulsos infinitamente pequeños de la fuerza que hace variar el movimiento , han de ser infinitamente pequeñas en comparacion de las *BC*, *CF* que espresan la velocidad actual del mobil ; los ángulos *BCE* , *CFH* , ó sus iguales *DBC* , *GCF* serán infinitamente pequeños ; luego el camino del mobil será una linea curva. Por donde se echa de ver , que para que un cuerpo ande una linea curva no basta que la fuerza obre cada instante infinitamente pequeño ; es tambien preciso que la accion que egercería en su propia direccion , á cada instante , sea infinitamente pequeña. Tal es el impulso que la pesantez comunica cada instante.

264 No importa que la fuerza que obra en el mobil sea una fuerza activa , qual es la gravedad ; ó una fuerza pasiva , qual es la resistencia de un punto fijo , ó de un fluido en reposo , ó de otro obstáculo qualquiera ; siempre está á nuestro arbitrio considerar el movimiento como una serie de movimientos compuestos , conforme lo hemos hecho en el egemplo propuesto ; ó podemos considerarle como una serie de movimientos resueltos del modo que vamos á declarar.

83. Por egemplo , quando el mobil , despues de haber llegado á *B* , está para recibir el impulso de la fuerza *BE* ; podemos (73) imaginar que el movimiento *BD* , que hu-

hubiera tenido sin el nuevo impulso, está resuelto en un Fig.
movimiento *BC* que ha de tener realmente, y en otro movimiento *BI* que no ha de causar efecto alguno, y que por lo mismo ha de ser igual y opuesto al impulso *BE*. Asimismo, quando el cuerpo hubiere llegado á *C*, imaginaremos el movimiento *CG* que hubiera tenido sin la fuerza *CH*, como resuelto en un movimiento *CF* que tendrá realmente, y un movimiento *CK* igual y directamente opuesto al impulso *CH*.

No hay caso ninguno en que no se pueda considerar el movimiento del uno de estos dos modos. Pero si se le quiere considerar de un modo mas conforme á la naturaleza, se habrá de preferir el primer modo, quando la fuerza por cuya accion varía el movimiento es una fuerza activa como la pesantez. Y por el contrario, quando dicha fuerza fuese una resistencia como la de un punto fijo, &c. mejor será considerarle del segundo modo.

265 Un cuerpo que se mueve en linea curva, se puede, pues, considerar cada instante como que se mueve en la tangente del punto en que está; y si la fuerza que le desvía cada instante, dejára de obrar, proseguiría moviéndose en la misma tangente.

266 Llamamos en general *Fuerza central* la fuerza que cada instante desvía el cuerpo, obligándole á que trace una linea curva. Quando consideramos el movimiento respecto de un punto fijo, y le impele la fuerza ácia él, se llama *Fuerza centrípeta*; y por el contrario, se llama *Fuer-*

za

Fig. *za centrífuga*, quando le impele para apartarle del mismo punto.

267 Ya que un cuerpo que traza una línea curva, dejaría de trazarla, y proseguiría su movimiento en la tangente, si dejára de obrar la fuerza central; se echa de ver que respecto de un punto fijo qualquiera *A* tomado á la parte de la concavidad, el mobil *M* en virtud de su movimiento en la curva, tiene en realidad una fuerza centrífuga, porque yá que procura moverse ácia *MT*, hace fuerza para apartarse del punto *A*, ácia el qual no se puede arrimar sino en virtud de la fuerza central.

Del Movimiento en el Círculo.

85. 268 Para que un cuerpo *A* libre y sin pesantez, impelido ácia una direccion qualquiera *PA*, pueda andar un círculo en virtud de la velocidad adquirida, y de una fuerza constantemente dirigida al punto fijo *C*; es menester primero que la direccion *PA* sea perpendicular á la linea *AC* que vá desde el punto *A* de donde sale el cuerpo al punto *C*. Pero no basta esta condicion, es tambien preciso que sea de cierta cantidad la velocidad comunicada.

Supongamos que la linea infinitamente pequeña *AB* sea el espacio que hubiera andado en un instante, si no fuera por el impulso de la fuerza central; y que (263) la linea infinitamente mas pequeña *AD* represente el espacio que la fuerza central obrando sin discontinuar le haría andar en el mismo instante. Por ser *AB* infinitamente

te pequeña, podemos mirar la fuerza central como que obra en el mobil, paralelamente á AD; luego si tiramos Bb paralela á AD, es preciso que la velocidad AB sea tal que la cantidad Bb, que representa lo que el cuerpo se hubiera apartado, sea igual á la AD, que representa lo que la fuerza central le puede arrimar. Veamos, pues, cómo podremos determinar en virtud de esta condicion la relacion entre la fuerza central y la velocidad comunicada. Fig. 85.

Prolonguemos el radio AC hasta que encuentre en E la circunferencia. Por la naturaleza del círculo será $(Db)^2 = AD \times DE$. Pero por ser AB infinitamente pequeña, hemos de mirar DE como igual á AE ó $2CA$; luego será $(Db)^2 = (AB)^2 = AD \times 2CA$.

Llamemos V la velocidad comunicada; tendremos (57) $AB = Vdt$. Luego $V^2dt^2 = (AB)^2 = AD \times 2CA$.

Llamemos g la velocidad que la fuerza central comunicaría en un segundo de tiempo á un mobil impelido de sola su accion repetida igualmente cada instante. Entonces (39) el espacio que hará andar en el instante dt, será $\frac{gdt^2}{2}$. Tendremos, pues, $AD = \frac{gdt^2}{2}$; luego $V^2dt^2 = \frac{gdt^2}{2} \times 2CA$, ó $V^2 = g \times CA$.

Llamando b la altura de que debería caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad V; y p la velocidad que la pesantez imprime en un segundo, tendremos $V^2 = 2pb$ (54). Luego $2pb = g \times CA$; de donde sacaremos $g : p :: 2b : CA :: b : \frac{1}{2}CA$; quiero decir, que para

que

Fig. que un cuerpo libre y sin pesantez ande una circunferen-
85. cia de círculo de un radio determinado, en virtud de una fuerza dirigida á su centro, y de una velocidad primitivamente comunicada; es menester que la fuerza central sea á la pesantez, como la altura de que un cuerpo pesado debería caer para adquirir la velocidad comunicada, es á la mitad del radio. Así, si la velocidad comunicada, y la fuerza central no tuviesen una con otra la razon necesaria para esto, no podrá el cuerpo andar una circunferencia de círculo. Pero si tuviesen dicha razon, el cuerpo trazará el arco *Ab*.

269 Ya que la fuerza central se dirige al centro *C*, es perpendicular al arco; luego no conspira, ni para aumentar, ni para disminuir la velocidad del cuerpo. Luego quando el cuerpo hubiese llegado al punto *b*, estará respecto de la fuerza central en las mismas circunstancias que en el punto *A*. De donde inferiremos que *si un cuerpo traza una circunferencia de círculo en virtud de una fuerza dirigida al centro, y de una velocidad comunicada; su velocidad será uniforme, y la fuerza central constante.*

86. 270 Si el cuerpo no estuviese libre; si, por egemplo, el cuerpo *A* está detenido en el punto fijo *C*, por medio de un hilo inestensible ó de una varilla; entonces si se le dá un impulso ácia una direccion qualquiera que se dirija á apartarle del centro, trazará por precision la circunferencia cuyo radio fuese *CA*; declaremos cómo se hace este movimiento. Sea el que fuere el punto *A* donde haya lle-

llegado el cuerpo, hace fuerza para moverse (265) por la tangente *AB*. Y como no puede seguir este movimiento, es preciso (174) que este se resuelva en otros dos, el uno *Ab* en la circunferencia, que será el que se verificará; el otro *AD* que es el que perderá; es, pues, preciso que este último se dirija ácia *CAD*, porque para destruirle no hay mas que la resistencia del punto fijo. Luego el movimiento se hará como en el caso antecedente, con sola la diferencia de que la fuerza central, en vez de ser centrípeta, será centrífuga. Por consiguiente quanto hemos dicho del primer caso se aplica á esto; quiero decir 1.° que el movimiento será uniforme. 2.° que la fuerza centrífuga será la misma en cada punto de la circunferencia, ó que el hilo se mantendrá tirante constantemente en virtud de una misma fuerza. 3.° que la fuerza centrífuga será á la pesantez como la altura de la qual debería caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad actual del mobil *A*, es á la mitad del radio *CA*. Fig.

Supongamos, por egemplo, que un cuerpo de una libra circule al estremo de una cuerda de 5 pies con una velocidad de 30, 2 pies por segundo. Como la altura correspondiente á esta velocidad es de 15, 1, la fuerza centrífuga de dicho cuerpo será á su pesantez como 15,1: $\frac{5}{2}$ :: 30,2 : 5 :: 6,04 : 1; luego dicho peso de una libra tiene tirante la cuerda con la misma fuerza que un peso inmobil de 6 libras $\frac{4}{100}$; porque las fuerzas ó cantidades de movimiento que el cuerpo *A* puede tener en virtud de su

gra-

Fig. gravedad ; y de su fuerza centrífuga, son entre sí como las velocidades g y p que dichas dos fuerzas pueden producir en un mismo tiempo.

271 Ya se nos hará fácil comparar una con otra las fuerzas centrífugas de dos mobiles qualesquiera que andan unas circunferencias qualesquiera con velocidades dadas, ó en tiempos dados.

Con efecto, de la equacion $V^2 = g \times CA$ que hallamos antes, se saca $g = \frac{V^2}{CA}$. Ya que g representa la velocidad que la fuerza central comunica en un segundo de tiempo al mobil, si le impeliera sin interrupcion é igualmente cada instante, será gdt la velocidad que produciría en un instante, y $A \times gdt$ será la cantidad de movimiento que produciría cada instante en el mobil; luego esta cantidad de movimiento será $\frac{A \times V^2 dt}{CA}$, substituyendo en lugar de g su valor. Luego si llamamos F la fuerza centrífuga absoluta, ó dicha cantidad de movimiento del cuerpo A, tendremos $F = \frac{A \times V^2 dt}{CA}$, ó $F = \frac{AV^2 dt}{R}$, con llamar R el radio CA. Luego respecto de otra masa A' que con una velocidad V' andaría una circunferencia cuyo radio fuese R', tendríamos $F' = \frac{A'V'^2 dt}{R'}$, llamando F' su fuerza centrífuga. Luego $F : F' :: \frac{A \times V^2 dt}{R} : \frac{A'V'^2 dt}{R'} :: \frac{AV^2}{R} : \frac{A'V'^2}{R'}$, que significa en general que *las fuerzas centrífugas de dos cuerpos son entre sí como las masas multiplicadas por los quadrados de las velocidades, y divididas por los radios de las circunferencias que andan.*

Lla-

272 Llamemos c y c' dichas circunferencias; T y T' Fig.
los tiempos que gastan los dos móbiles en dar una vuelta entera. Una vez que sus movimientos son uniformes, tendremos $V = \frac{C}{T}$, y $V' = \frac{C}{T'}$ (19). Y como en el supuesto de ser $1 : c$ la razon del radio á la circunferencia es $C = cR$, y $C' = cR'$; será $V = \frac{cR}{T}$, y $V' = \frac{cR'}{T'}$; y substituyendo estos valores en lugar de V y V' en la proporcion que sacamos poco há, tendremos $F : F' :: \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} :: \frac{AR}{T^2} : \frac{A'R'}{T'^2}$; luego *las fuerzas centrífugas son como las masas multiplicadas por los radios, y divididas por los quadrados de los tiempos de las revoluciones.*

273 De la razon que hemos (268) sentado entre la gravedad, y la fuerza centrífuga, y del egemplo propuesto (270) se infiere que quando un cuerpo sólido, ó muchos cuerpos sólidos atados unos con otros dán vueltas al rededor de un punto fijo, las partes de dichos cuerpos tienen una propension á separarse, apartándose del centro, y que esta propension puede ser mucho mayor que su peso. Y lo que acabamos de demostrar (272) manifiesta que si concluyen sus revoluciones á un tiempo, sus fuerzas centrífugas son proporcionales á las masas multiplicadas por los radios; por manera que las partes iguales hacen tanta mas fuerza para separarse quanto mas apartadas están del centro de rotacion.

Luego si un fluido pesado ó no pesado circula, sus partes hacen continuamente fuerza para escaparse y alejarse del centro C, de forma que si el fluido está dentro de un 87.

va-

Fig. vaso, y se le hace un agugero á qualquiera distancia del centro, se saldrá dicho fluido.

274 Una masa fluida de figura esférica, y cuyas partes no se hallasen solicitadas por mas fuerzas que por una propension ácia un punto fijo *C*, que fuese el centro de dicha masa, guardaría constantemente esta figura, si dicha propension ó pesantez ácia el punto *C* fuese siempre una á distancias iguales de *C*; en esto no hay duda. Pero si dicha masa tuviere al mismo tiempo un movimiento de rotacion al rededor de una recta qualquiera *AB*, yá no podrá guardar mas su figura. Porque como entonces una partecilla qualquiera *M* trazará un círculo cuyo radio será *PM*, tendrá una cierta fuerza centrífuga que la impele para que se aparte del centro *P* con una fuerza proporcionada á su distancia *PM* (272). Luego si *Mm* representa este impulso, y representa *MO* el impulso de la pesantez ó la propension ácia *C*, é imaginamos el paralelogramo *mMOR*, será *MR* la direccion ácia la qual es impelida para moverse la partícula *M*; y como permanece una misma la fuerza *MO* respecto de cada partícula puesta en la superficie, siendo así que la fuerza *Mm* varía y mengua al paso que nos apartamos del círculo máximo ó equador representado por *EQ*, es evidente que las fuerzas absolutas *MR*, que solicitan verdaderamente dichas partículas, son todas diferentes, y dirigidas ácia distintos puntos. Es, pues, preciso que la masa pierda su figura esférica. Pero tome la que tomáre, ha de ser tal, conforme probaremos en otro lugar, que la fuerza

za absoluta *MR* que solicita cada partícula de la superficie, sea perpendicular á la nueva superficie; luego la nueva figura *TVNX* que adquirirá la masa, ha de ser tal que *MR* la sea perpendicular; luego dicha masa ha de ser aplanada ácia los polos *X* y *V*, y por el contrario prolongada en la direccion del equador que en lugar de ser *EQ*, llegará á ser *TN*. Fig. 87.

Este es cabalmente el caso en que se halla la tierra, que, ora fuese primitivamente fluida, ora fuese en parte fluida, y en parte sólida, ha tenido por precision al principio una figura aplanada; sin esto, en virtud de las fuerzas centrífugas de las diferentes partes, hubiera sucedido un trastorno general hasta que todo hubiese tomado la figura aplanada conveniente al movimiento de rotacion.

MO es la verdadera direccion de la pesantez, no de aquella cuyos efectos percibimos, sino de aquella que tendría lugar á no ser la rotacion de la tierra. *MR* es la gravedad cuyos efectos se nos manifiestan, y esta es la direccion que siguen los cuerpos pesados que caen cerca de la superficie de la tierra ácia *M*. Por consiguiente la pesantez actual no impele los cuerpos ácia el centro de la tierra. Pero como de las observaciones resulta que es poco aplanada la tierra respecto del radio del equador, el punto *S* dista poco del punto *C*.

Como el ángulo *mMO* es necesariamente obtuso, es facil hacerse cargo de que *MR* es siempre menor que *MO*, y tanto menor quanto el punto *M* está mas inmediato al

Fig. equador ; por manera que la pesantez vá menguando desde los polos hasta el equador. Luego la longitud (258) del péndulo que señala los segundos, no es una misma en todos los lugares de la tierra; es preciso que mengue al paso que nos acercamos al equador.

En los polos donde la fuerza centrífuga es nula, obra la pesantez del mismo modo que si se mantuviera inmobil la tierra. En el equador, donde la fuerza centrífuga es directamente contraria á la pesantez primitiva, la pesantez es menor de todo el valor de la fuerza centrífuga. En los paises intermedios, la diminucion de la pesantez es menor por dos causas; la primera, porque como la fuerza centrífuga no es directamente contraria á la direccion de la pesantez primitiva, no destruye sino una parte tanto menor quanto mayor es el arco *MT*; la segunda, porque la fuerza centrífuga mengua á proporcion que el punto *M* está mas lejos del equador.

275 Lo que hemos dicho tocante al modo de medir la fuerza centrífuga en el círculo, se aplica igualmente á la fuerza centrífuga de un cuerpo que se mueve en una curva qualquiera: no hay mas diferencia sino en que la fuerza centrífuga varía de un punto á otro; pero siempre está cifrado su valor en la equacion $2pb = g \times R$, siendo R el radio de la evoluta, esto es el radio del círculo que mide la curvatura de la curva en cada punto.

Del

Fig.

Del Movimiento de los Proyectiles ó Cuerpos arrojados.

276 Llamamos *Movimiento de los Proyectiles* el que toman los cuerpos que despues de arrojados con una fuerza qualquiera, quedan entregados á la accion de la pesantez, y á la resistencia del fluido que llena el espacio, ó el *medio* en que se mueven, quando el medio está lleno de algun fluido. Veamos primero quál sería la curva que andarían los proyectiles si el medio en que se mueven no les opusiera ninguna resistencia.

277 Supongamos, pues, que en el punto *A* se haya arrojado un mobil ácia la direccion *AZ*, y con una velocidad qualquiera. Si no obrára la pesantez, se movería uniformemente en la recta *AZ*. Pero como la pesantez obra en él sin cesar, no se mantendrá en la recta *AZ* sino un instante infinitamente pequeño, y andará en lugar de *AZ* una linea curva *ABC*, de la qual será *AZ* tangente en el punto *A*, pues *AZ* es una de las direcciones instantaneas del mobil. 88.

Para determinar la naturaleza de esta linea curva, supongo que *AE* es la velocidad comunicada, ó el número de pies que el mobil andaría por segundo, si tuviera siempre dicha velocidad; y al salir del punto *A*, imagino esta velocidad formada de otras dos, la una *AD* orizontal, y la otra *AF* vertical. Es evidente que la direccion de la pesantez por ser vertical ó perpendicular á *AD*, no puede, ni aumentar, ni disminuir la velocidad *AD*; que por consi-

Fig. guiente en qualquiera parte que se halle el mobil en el discurso de su movimiento, guardará constantemente una misma velocidad paralelamente al orizonte. Por lo que mira á la velocidad *AF*, quando el mobil, en virtud de su velocidad constante paralelamente al orizonte, hubiere abanzado una cantidad igual á *AP*, no estará elevado á la altura *PN* á que hubiera llegado sin el impulso de la pesantez, y se hallará en un punto qualquiera *M* mas bajo, en la misma linea vertical *PN*; porque siendo su velocidad en la direccion vertical directamente contraria á la de la pesantez, el espacio que andaría en virtud de dicha velocidad vertical, ha de menguar todo lo que el impulso de la pesantez haría andar á un mobil en el mismo tiempo.

Llamemos, pues, V la velocidad comunicada en la direccion *AZ*, ó el número de pies que andaría uniformemente el mobil, por segundo, en virtud de dicha velocidad; y t el tiempo ó número de segundos ó partes de segundo que gastaría en venir desde *A* al punto qualquiera *N*. Tendremos $AN = Vt$ (20).

Sea p la velocidad que la gravedad comunica en un segundo de tiempo; $\frac{pt^2}{2}$ será el espacio que un cuerpo pesado andará en el número t de segundos (39). Luego si M es el punto donde el cuerpo llega realmente al cabo del tiempo t, tendremos $NM = \frac{1}{2}pt^2$.

Tiremos por el punto *A* la vertical *AX*; y por el punto *M* la linea *MQ* paralela á la tangente *AZ*; llamemos *AQ*, x'; y *QM* que es igual á *AN*, y'. Tendremos, pues,

x'

$x' = \frac{1}{2}pt^2$, é $y' = Vt$. Si de esta última equacion sacamos el valor de t, para substituirle en la primera, tendremos Fig.

$x' = \frac{\frac{1}{2}py'y'}{V^2}$, ó $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}x' = y'y'$. Pero (54) $\frac{V^2}{2p}$ es la altura de que habría de caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad V; luego si llamamos b esta altura, tendremos $\frac{V^2}{2p} = b$, y por consiguiente $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} = 4b$; luego $4bx' = y'y'$.

Luego cada punto M de la curva AMC tiene la propiedad de que el quadrado de la ordenada y' ó QM paralela á la tangente AZ, es igual al producto de la abscisa AQ por una linea constante $4b$; luego la curva AMC es una parábola cuyo diámetro es la linea vertical AX, y el parámetro el quádruplo de la altura correspondiente á la velocidad de proyeccion, y cuyas ordenadas forman con dicho diámetro el ángulo AQM, que es el complemento del ángulo de proyeccion ZAC; luego dada la velocidad, y el ángulo de proyeccion, será facil trazar la curva por lo dicho (III.70).

278 Consideremos ahora algunas de las propiedades de dicha curva considerada como el rastro de los proyectiles; y con esta mira refiramos sus diferentes puntos M á la linea orizontal AC, tirando MP perpendicular á AC. 88.

Llamemos AP, x; PM, y; a, el ángulo de proyeccion ZAC. El triángulo rectángulo APN dará $1 : AN :: \text{sen } NAP : PN :: \cos NAP : AP$; luego $PN = Vt \text{ sen } a$, y $AP = Vt \cos a$; luego ya que $MN = \frac{1}{2}pt^2$, conforme proba-

Fig. mos antes, tendremos $PM = Vt$ sen $a - \frac{1}{2}pt^2$. Será, pues, $x = Vt$ cos a, é $y = Vt$ sen $a - \frac{1}{2}pt^2$. Si sacamos de la primera el valor de t, y le substituimos en la segunda, tendremos, despues de egecutadas las reducciones correspondientes, y substituyendo en lugar de $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$ su valor $4b$, $4by \cos^2 a = 4bx$ sen a cos $a - xx$, de cuya equacion sacaremos las propiedades siguientes.

279 Como la velocidad comunicada al mobil no puede ser mas que de un valor determinado, la accion de la gravedad destruirá al cabo de cierto tiempo su efecto en la direccion vertical; por manera que llegará el caso en que el cuerpo dege de subir, y empiece á bajar; pero como su velocidad actual no está alterada, quando hubiese llegado al punto mas alto B, trazará el segundo ramo BC de la misma curva, y volverá á encontrar la orizontal en otro punto C. Para conocer la distancia AC que se llama la *Amplitud de la Proyeccion*, se viene á los ojos que bastará suponer $y = 0$. Tendremos, pues, $4bx$ sen a cos $a - xx = 0$; que dá $x = 0$, y $x = 4b$ sen a cos a. El primer valor de x indica el punto A, y el segundo es el valor de AC, que determinaremos con prolongar XA hasta que $AK = 4b$, bajando desde el punto K la KL perpendicular á AZ, y desde el punto L la LC perpendicular á AC; entonces tendremos $AC = 4b$ sen a cos a.

280 Si respecto de una misma velocidad de proyeccion quisiéramos averiguar quál es el ángulo que dá la mayor

yor amplitud; diferenciaríamos (III. 401) el valor de AC Fig.
mirando a como variable, é igualaríamos la diferencial con cero; tendríamos, pues, $4bda \cos^2 a - 4bda \operatorname{sen}^2 a = 0$, de donde sacaríamos $\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} = 1$, ó $\operatorname{tang}^2 a = 1$; luego $\operatorname{tang} a = 1$; esto quiere decir que la tangente del ángulo de proyeccion es entonces igual al radio, y es por consiguiente dicho ángulo de 45.° Luego *la mayor amplitud se verifica quando el ángulo de proyeccion es de* 45.°

281 En el mismo caso tendremos $\operatorname{sen} a = \cos a = \sqrt{\frac{1}{2}}$; luego el valor de AC será entonces $4b \times \frac{1}{2}$, ó $2b$; luego *la mayor amplitud es dupla de la altura de que habría de caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad de proyeccion.*

Esto puede servir para apreciar la fuerza de la pólvora, disparando de modo que la puntería forme un ángulo de 45°, y midiendo la amplitud, se sacará el valor de b que servirá para determinar la velocidad que la pólvora puede comunicar al proyectil; y tomando el duplo de dicha amplitud sacaremos al mismo tiempo el parámetro del diámetro AX que sirve para construir la curva, y determinar los ángulos de proyeccion, conforme veremos dentro de poco.

282 Si quisiéramos averiguar donde está el punto mas alto de la curva, igualaríamos con cero la diferencial de y sacada en el supuesto de no haber mas variable que x. Hallaríamos, pues, $4bdx \operatorname{sen} a \cos a - 2xdx = 0$, de donde se saca $x = 2b \operatorname{sen} a \cos a$; luego una vez que hemos

Fig. mos hallado $AC = 4b$ sen a cos a, si imaginamos la perpendicular BD, tendremos $AD = \frac{1}{2}AC$. Y si en lugar de x substituimos su valor $2b$ sen a cos a, en la equacion, saldrá $BD = b$ sen$^2 a$; esto determina el vértice del ege; porque siendo $dy = 0$ en el punto B, la tangente en B será paralela á AC, ó perpendicular á BD.

89. 283 Determinemos ahora la direccion AZ que se le ha de dár al mobil para que cayga en un punto dado M; esto es, qué inclinacion se le ha de dár, por egemplo, á un mortero para que cayga la bomba en un punto dado M.

Imaginaremos la perpendicular MP, y hemos de considerar la distancia AP, y el ángulo MAP como conocidos. Llamemos, pues, b, el ángulo MAP, y c la distancia AP; tendremos $MP = \frac{c \text{ sen } b}{\cos b}$. Luego respecto del punto M será $x = c$ é $y = \frac{c \text{ sen } b}{\cos b}$. Substituyendo estos valores en la equacion de x é y, sacaremos $4b$ sen b cos$^2 a = 4b$ sen a cos a cos b — c cos b, ó $4b$ cos a (sen a cos b — sen b cos a) $= c$ cos b, ó (II. 378) $4b$ cos a sen$(a - b) = c$ cos b, ó $2b$ sen $(2a - b) = 2b$ sen $b + c$ cos b; luego finalmente $\frac{2b}{\cos b}$ sen$(2a - b) = \frac{2b \text{ sen } b}{\cos b} + c$, que dá la construccion siguiente.

Tiraremos á la AM la perpendicular indefinita AE, desde el medio D de $AK = 4b$, tiraremos á AK la perpendicular DE que cortará AE en un punto E, desde el qual como centro, y con el radio EA trazaremos el arco $ANN'K$; y despues de prolongada PM hasta que encuentre dicho arco en los puntos N, N', si tiramos ANZ, $AN'Z'$ estas

tas líneas serán las dos direcciones por las quales un mobil arrojado con una velocidad correspondiente á la altura b, podrá llegar igualmente al punto M. Fig.

Porque bien se echa de ver que el ángulo EAD del triángulo rectángulo ADE es igual á MAP. Luego ya que $AD = 2b$, tendremos $ED = \frac{2h \operatorname{sen} b}{\cos b}$; y por ser $AP = c$, será $ED + AP$, ó $EI = \frac{2h \operatorname{sen} b}{\cos b} + c$; luego $\frac{2h \operatorname{sen}(2a - b)}{\cos b} = EI$. Pero en el mismo triángulo ADE tenemos $AE = \frac{2h}{\cos b}$; luego $AE \operatorname{sen}(2a - b) = EI$. Imaginemos el arco KNA prolongado hasta que encuentre en G la vertical GE; y por los puntos N y N' tiremos las perpendiculares NL, $N'L'$. Del triángulo NEL sacaremos $NE : NL$ ó $AE : EI :: 1 : \operatorname{sen} NEG$; luego $AE \operatorname{sen} NEG = EI$; luego tambien tendremos $\operatorname{sen}(2a - b) = \operatorname{sen} NEG$; y $2a - b = NEG = NEA + b$; luego $a = \frac{1}{2}NEA + b$. Pero por estar en la circunferencia el vértice del ángulo NAM, y ser AM tangente, es $NAM = \frac{1}{2}NEA$; por otra parte el ángulo $MAP = b$; luego $a = NAM + MAP = NAP$; luego el punto N resuelve la cuestion.

Del mismo modo probaríamos que el punto N' la resuelve tambien, porque en el triángulo $N'EL'$ se verifica que $N'E : N'L'$ ó $AE : EI :: 1 : \operatorname{sen} NEL'$ ó $:: 1 : \operatorname{sen} N'EG$; luego $AE \operatorname{sen} N'EG = EI$; luego tambien $\operatorname{sen}(2a - b) = \operatorname{sen} N'EG$, y $2a - b = N'EG = N'EA + b$; luego $a = \frac{1}{2}N'EA + b = N'AM + MAP = N'AP$.

284. Por consiguiente con una misma fuerza de proyec-

Fig. yeccion siempre se podrá dár en un mismo blanco *M* por dos direcciones diferentes, con tal que *AP* no sea mayor que *DR*. La direccion *AN'* es mas ventajosa quando se quieren hundir con la bomba edificios ú otras cosas. La direccion *AN* es de preferir quando no se lleva otra mira que la de derribar; á fin de que el proyectil, despues de haber dado en el blanco pueda levantarse, y hacer mas estrago á alguna distancia.

285 Concluiremos este asunto del movimiento de los cuerpos arrojados en un medio sin resistencia, con observar, que pues la gravedad desvía los cuerpos de la direccion en la qual se les impele, y los arrima á la superficie de la tierra, quando dirigimos la puntería á algun objeto que queremos alcanzar arrojándole otro cuerpo, siempre se ha de dirigir la puntería mas arriba, y tanto mas arriba, quanto mayor fuere la distancia, y menor la fuerza de impulsion. Este es el motivo por que en las armas de fuego la mira forma un ángulo con el ege de la pieza; por manera que dichas dos lineas se encontrarian prolongadas mas allá de la boca respecto de la culata. El proyectil ó bala arrojada en la direccion del ege, sale ácia una direccion que forma con el orizonte un ángulo mayor que el que forma la mira, y sucede lo propio que si se dirigiera la puntería á la direccion del ege, pero mas arriba del objeto.

286 Tambien puede suceder que bien que al parecer no se le haya dado impulso alguno á un cuerpo, y parezca que le abandonamos á su sola gravedad, no obstante tra-

traza dicho cuerpo la linea curva comun á todos los proyectiles. Por egemplo, un cuerpo que cae desde el mastil de un navio que navega, traza realmente una linea curva. Si se mira el punto del navio donde cae, estará tan apartado del palo quanto lo estaba el punto de donde cayó el mobil; esto manifiesta que respecto del mastil el mobil ha trazado una linea recta paralela al palo; pero respecto de un espectador puesto fuera del navio ha trazado en realidad una parábola, por lo menos si prescindimos de la resistencia del ayre. Porque quando se le ha entregado á su pesantez, tenia la misma velocidad que el navio, pues se movía con él. Se hallaba, pues, en el mismo caso, que si estando inmobil la embarcacion, se le hubiera arrojado con una velocidad igual á la del navio, y ácia la misma direccion. Con esto se percibe la razon por qué sin embargo de lo dicho traza respecto del mobil una linea recta paralela al palo, porque como tiene ácia la direccion de este la misma velocidad, ha de permanecer siempre á la misma distancia del palo. Fig.

De otros Movimientos curvilineos.

287 Hemos supuesto que las fuerzas que obraban en el proyectil, estaban en el mismo plano que la direccion del impulso primitivo. Mientras las fuerzas están en un mismo plano, se pueden siempre reducir á una sola, sea el que fuese su número (75). Pero es mas acomodado reducirlas á dos (101) paralelas á dos lineas dadas de posicion. El egemplo que vamos á proponer bastará para en-

Fig. enseñar cómo podrá egecutarse esta reduccion en todos los casos.

288 Supongamos, pues, que ha sido arrojado un proyectil en una direccion qualquiera, y con una velocidad qualquiera. Que en cada punto m del camino que sigue, se halle solicitado de tres fuerzas, la una ácia la curva, la segunda dirigida ácia un punto fijo C, y la tercera perpendicular á mC; todas tres en un mismo plano.

90. Concibamos que Mm es el arco infinitamente pequeño que el cuerpo acaba de trazar en el instante dt; que mc dirigida ácia mM sea la velocidad que la primera fuerza puede comunicar en el instante dt; mk la que la segunda puede comunicar en el mismo instante; y finalmente mg la que puede comunicar la tercera. Llamemos P, P', P'' estas tres fuerzas; quiero decir las velocidades que engendrarian en un segundo de tiempo, si en cada instante de la duracion de dicho segundo, obrasen del mismo modo que en m. Entonces Pdt, $P'dt$, $P''dt$ serán las velocidades que engendran en el instante dt, y tendremos por lo mismo $mc = Pdt$, $mk = P'dt$, $mg = P''dt$.

Concibamos que despues de tirada á arbitrio por el punto C la linea CA, tracemos al rededor de las lineas mc, mk, mg como diagonales, los paralelogramos que se vén en la figura, esto es que tengan uno de sus lados contiguos paralelo, y el otro perpendicular á AC. Podremos resolver cada una de estas tres velocidades en otras dos, la una paralela, y la otra perpendicular á AC. Y las fuerzas que

que solicitan el cuerpo, ó las velocidades que intentan comunicarle, se reducirán á dos, la una paralela á AC, que será $= mf + mb - md$; la otra perpendicular á AC, que será $= me + mb - md$, que intenta arrimar el cuerpo á AC. La velocidad del mobil paralelamente á AC, adquirirá, pues, el incremento $mf + mb - md$; y la velocidad para subir mas arriba de AC, padecerá la diminucion $me + mb - mn$. Fig.

Pero al paso que el mobil adelanta en la direccion Mm, traza paralelamente á AC la linea Mr, y perpendicularmente á AC la linea rm. Luego si despues de tomado á arbitrio el punto fijo A, llamamos AP, x; PM, y; serán $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ respectivamente la velocidad paralela á AC, y la velocidad perpendicular á AC. Luego por la misma razon quando el cuerpo anduviere mm', las velocidades correspondientes serán $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, y $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$; tendremos, pues, $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = mf + mb - md$, y $- d\left(\frac{dy}{dt}\right) = me + mb - mn$.

Y si comparamos los triángulos semejantes mek, mpC, los triángulos semejantes mbg, mpC, y los triángulos semejantes mbc, mrM, y llamamos AC, c; y CM ó Cm, z; tendremos ek ó $mf = \frac{c-x}{z} P'dt$, $me = \frac{y}{z} P'dt$, $mb = \frac{y}{z} P''dt$, gb ó $mn = \frac{c-x}{z} P''dt$, $mb = \frac{dy}{ds} Pdt$, bc ó $md = \frac{dx}{ds} Pdt$. Luego finalmente $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{c-x}{z} P'dt + \frac{y}{z} P''dt - \frac{dx}{ds} Pdt$, y $- d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y}{z} P'dt + \frac{dy}{ds} Pdt - \frac{c-x}{z} P''dt$. Estas son las dos equaciones que determinarán todas las circunstancias del movimiento del cuerpo una vez que conozcamos P, P', P''. Lo probaremos con algunos egemplos.

Si

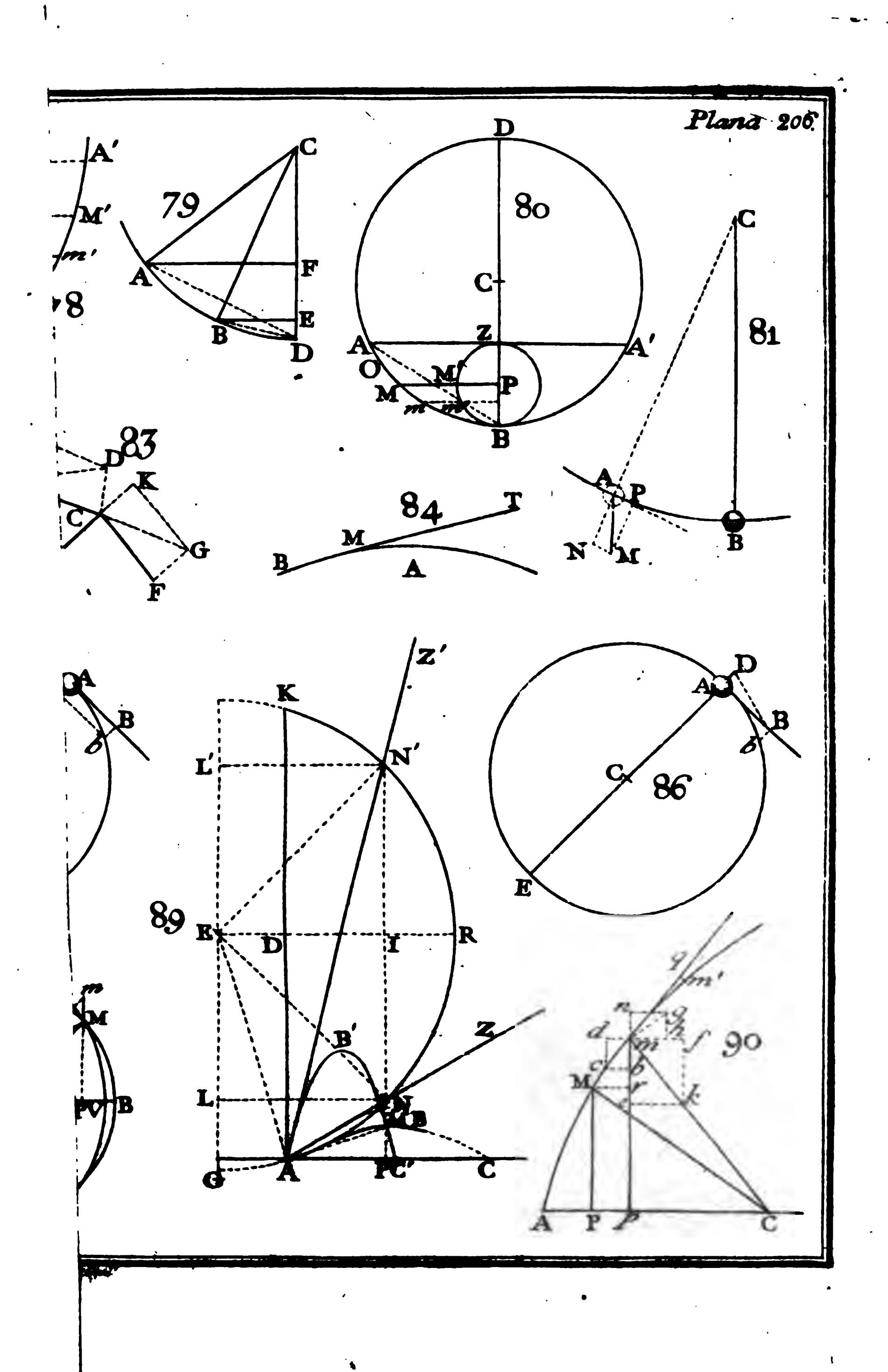
Fig. 289 Si el punto C está á una distancia infinita, z será infinita, é $= y$; por lo que mira á $c - x$ se ha de descartar como nula respecto de z é y. Tendremos, pues, $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = P''dt - \frac{dx}{dt}Pdt$, y $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = P'dt + \frac{dy}{dt}Pdt$, cuyas dos equaciones servirán para determinar el movimiento, quando las dos fuerzas P' y P'' son constantemente paralelas á dos rectas dadas de posicion.

290 Si el punto C estando á una distancia finita, suponemos P y $P'' = 0$, entonces serán $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{yP'dt}{z}$, y $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{(c-x)P'dt}{z}$ las equaciones que determinarán el movimiento de un cuerpo que arrojado en un medio libre fuese impelido ácia un punto fijo C por una fuerza qualquiera P'. Paremos un rato la consideracion en las circunstancias de este movimiento.

Si despues de multiplicada la primera de estas dos equaciones por $c - x$, la restamos de la segunda multiplicada por y, sacaremos $(c-x)d\left(\frac{dy}{dt}\right) + yd\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, cuya integral es $(c - x)\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = C$.

Y si despues de multiplicar la primera por $\frac{dy}{dt}$, la sumamos con la segunda multiplicada por $-\frac{dx}{dt}$, sacaremos $-\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{P'[ydy - dx(c-x)]}{z}$. Pero $z = \sqrt{[yy + (c-x)^2]}$, y por consiguiente $ydy - dx(c-x) = zdz$; luego $-\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) = P'dz$; luego si P' fuese una funcion de z, tendremos $C' - \frac{dy^2}{2dt^2} - \frac{dx^2}{2dt^2} = S.P'dz$, no habiendo en esta última cantidad mas que una variable.

Con la mira de simplificar el cálculo, llamaremos r el


79
80
81
83
84
86
89
90

el ángulo MCA, tendremos $y = z$ sen r, $c - x = z \cos r$, Fig.
y las dos integrales se transformarán en $\frac{z^2 dr}{dt} = C$, y $C' - \frac{dz^2 + z^2 dr^2}{2dt^2} = S.P'dz$. Substituyendo en la segunda el valor de dt sacado de la primera, tendremos despues de egecutadas las reducciones correspondientes, $dr =$

$$\frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left(\frac{2C'}{C^2} - \frac{2}{C^2} S.P'dz - \frac{1}{z^2}\right)}}.$$ Luego mientras fuere P' una funcion de z, siempre se podrá construir la curva á lo menos por las quadraturas.

291 Veamos ahora quáles son las propiedades de este movimiento.

En la equacion $\frac{z^2 dr}{dt} = C$, ó $z^2 dr = Cdt$, zdr representa el arco MS trazado con el radio CM; luego $\frac{z^2 dr}{2}$ es la superficie del sector MCm; tendremos, pues, $z^2 dr = 2MCm$; y por consiguiente $2MCm = Cdt$; luego $2ACM = Ct$; quiero decir, que *el sector* ACM *proporcional al arco* AM *andado en el tiempo* t *es proporcional al tiempo.*

292 Si desde el centro C de las fuerzas se tira á la tangente en M la perpendicular CT, tendremos $Mm : Ms :: CM : CT$, ó $Mm = \frac{z^2 dr}{CT} = \frac{Cdt}{CT}$; luego $\frac{Mm}{dt}$, ó la velocidad $v = \frac{C}{CT}$, esto quiere decir que *las velocidades en los diferentes puntos* M *de la curva, son en razon inversa de las perpendiculares bajadas desde el centro* C *de las fuerzas á dichas tangentes.*

293 De la misma equacion $z^2 dr = Cdt$ se saca $\frac{dr}{dt} = \frac{C}{z^2}$. Pero $\frac{dr}{dt}$ espresa la velocidad angular ó la velocidad con

Fig. con que es trazado el ángulo dr; luego *la velocidad angular es recíprocamente proporcional al quadrado de la distancia.*

294 Supongamos que sea A el punto de donde salió el cuerpo, y que haya sido arrojado perpendicularmente á AC con una velocidad g. Sea f el valor de AC, y llamemos en general ds el arco pequeño andado en la curva en un instante. Es evidente, que en el punto A, el arco Ms llega á ser ds, y que z llega á ser f. La equacion $z^2dr = Cdt$, ó $z \times zdr = Cdt$, será, pues, $f \times ds = Cdt$; luego $\frac{ds}{dt} = \frac{C}{f}$; pero $\frac{ds}{dt}$ es entonces g; luego $g = \frac{C}{f}$, ó $C = gf$. Y por consiguiente la equacion $z^2dr = Cdt$ se transforma en $z^2dr = gfdt$.

295 Apliquemos ahora lo dicho á un caso particular, y supongamos que la fuerza central obra en razon inversa de los quadrados de las distancias; quiero decir, que si k representa, por egemplo, la velocidad que la fuerza central puede comunicar continuando igualmente por espacio de un segundo el impulso con que obra á una distancia conocida AC ó f, la que puede producir en el mismo tiempo por la accion de que es capaz en M, se determinará por la proporcion $zz : ff :: k : \frac{ffk}{zz}$.

Tendremos, pues, $P' = \frac{ffk}{zz}$, y por lo mismo $S.P'dz = -\frac{ffk}{z}$, á cuya cantidad no añadimos ninguna constante, porque la constante yá se añadió en la integracion que egecutamos antes para sacar la equacion de la curva. Substituyendo, pues, este valor, y el de C en el de dr, que halla-

llamos antes, sacaremos $dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left(\frac{2C'}{g^2f^2} + \frac{2k}{g^2z} - \frac{1}{zz}\right)}}$. Fig. 91.

Antes de pasar adelante, determinemos C'. Volvamos con esta mira á la equacion $C' - \frac{dz^2 + z^2dr^2}{2dt^2} = S.P'dz$, ó $C' - \frac{ds^2}{2dt^2} = -\frac{fk}{z}$. La constante C' ha de ser tal que en el punto A tengamos $\frac{ds}{dt} = g$; tendremos, pues, $C' - \frac{g^2}{2} = -fk$, ó $C' = \frac{g^2 - 2fk}{2}$.

Luego la equacion de la curva se transforma en $dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left[\frac{g^2 - 2fk}{g^2f^2} + \frac{2k}{g^2z} - \frac{1}{zz}\right]}}$, que se puede escribir de este modo $dr = \frac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left[\left(\frac{g^2 - fk}{g^2f}\right)^2 - \left(\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z}\right)^2\right]}}$. Luego si para abreviar, hacemos $\frac{g^2 - fk}{g^2f} = q$, y $\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z} = qy'$, siendo y' una nueva variable, y q una constante, tendremos $dr = \frac{dy'}{\sqrt{(1 - y'y')}}$; integrando, sacaremos (III. 655) $y' =$ sen $(r + C'') =$ sen r cos $C'' +$ sen C'' cos r.

Para determinar la constante C', repararemos que quando $z = f$, ha de ser $r = 0$; pero quando $z = f$, la equacion $\frac{k}{g^2} - \frac{1}{z} = qy'$ dá $y' = \frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qf}$; luego $\frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qf} =$ sen C''; esto es, substituyendo en lugar de q su valor, sen $C'' = -1$; luego cos $C'' = 0$. Por consiguiente la equacion se transformará en $y' = -$ cos $r = \frac{k}{qg^2} - \frac{1}{qz}$; luego $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + q$ cos r, ó finalmente $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + \left(\frac{1}{f} - \frac{k}{g^2}\right)$ cos r; cuya equacion pertenece en general á una seccion cónica, cuyo focus es C y A el vértice, como es facil comprobarlo, restituyendo en lugar de cos r su valor $\frac{c - x}{z}$, y en lugar de z, su valor $\sqrt{\left[yy + (c - x)^2\right]}$. En particular

 per-

Fig. pertenece á la elipse quando $\frac{k}{g^2}$ es mayor que $\frac{1}{2f}$; al círculo si $\frac{k}{g^2} = \frac{1}{f}$; á la parábola si $\frac{k}{g^2} = \frac{1}{2f}$. Finalmente pertenece á una hypérbola quando $\frac{k}{g^2}$ es menor que $\frac{1}{2f}$.

296 Hemos considerado en particular el caso en que la fuerza central obra en razon inversa de los quadrados de las distancias, porque así obra en los cuerpos celestes, conforme lo probaremos en otro lugar. Manifiestan las observaciones, y el cálculo que todas las partes de la materia tienen una propension ó tendencia á unirse unas con otras. Esta tendencia, cuya causa ignoramos, puede compararse con la que tienen los cuerpos terrestres ácia el centro de la tierra; esto es, con la pesantez que no es probablemente mas que un caso particular de esta tendencia general, conocida con el nombre de *Atraccion*, mientras se averigua su causa. Como la masa del Sol es sin comparacion mucho mayor que la de qualquiera de los planetas, su accion en estas es mucho mayor que la accion de unos planetas en otros; por manera que en la valuacion de las principales circunstancias de sus movimientos, basta atender á la accion del Sol. Pero la ley de esta fuerza de atraccion es tal, que cada partícula del cuerpo atrayente obra en razon inversa del quadrado de la distancia; y que quando el cuerpo es esférico, la suma de las acciones de cada una de sus partes se reduce á una sola que pasa por su centro de masa, y obra tambien en razon inversa del quadrado de las distancias. De donde se infiere, igualmente que de lo probado poco ha, que los planetas describen al rededor del Sol una de las secciones

ciones cónicas. Y como consta por las observaciones que vuelven periódicamente á unos mismos puntos, y que varía la distancia de un mismo planeta respecto del Sol, hemos de inferir, que el camino de los planetas, y lo propio digo de los cometas, es una elipse. Fig.

297 Como las direcciones de la pesantez concurren al centro de la tierra, con muy corta diferencia, y la pesantez varía á diferentes distancias del centro de la tierra, muy poco mas ó menos, en razon inversa de los quadrados de las distancias, se echa de ver que la curva que trazan los proyectiles no es sino sensiblemente una parábola, y que hablando con rigor es una elipse que tiene el uno de sus focus en el centro de la tierra.

298 Si en la equacion $\frac{1}{z} = \frac{k}{g^2} + \left(\frac{1}{f} - \frac{k}{g^2}\right) \cos x$ hacemos $x = 0$, y $r = 180°$, para hallar los puntos donde la linea *AC* encuentra la curva, sacarémos $\frac{1}{z} = \frac{1}{f}$, ó $z = f$; y si llamamos z' el segundo valor de z, $\frac{1}{z'} = -\frac{1}{f} + \frac{2k}{g^2}$, ó $z' = \frac{fg^2}{2kf - g^2}$; luego $z + z'$, ó el ege mayor *AB* que llamarémos a, es $= \frac{2kf^2}{2kf - g^2}$. Pero hemos visto (III. 86) que si llamamos b el ege menor, es $\frac{bb}{4} = AC \times CB = fz' = \frac{ffg^2}{2kf - g^2}$; luego $b = \frac{2fg}{\surd(2kf - g^2)}$. 91.

299 Sentado esto, llamemos $1 : c'$ la razon entre el diámetro y la circunferencia. Por lo dicho (III. 577) será $\frac{c'ab}{4}$ la superficie de una elipse, cuyos dos eges serian a y b. Luego la superficie de la elipse cuyos dos eges acabamos de determinar, será $\frac{kf^3gc'}{(2kf - g^2)^{\frac{3}{2}}}$. Pero hemos visto (291)

 que

Fig. que en general $2ACM=Ct=fgt$; luego si llamámos T el tiempo de una revolucion entera, será $\frac{2kf^3gc'}{(2kf-g^2)^{\frac{3}{2}}}=fgT$, ó $T=\frac{2kf^2c'}{(2kf-g^2)^{\frac{3}{2}}}$, ó $Tf\sqrt{2k}=\frac{2f^3kc'\sqrt{2k}}{(2kf-g^2)^{\frac{3}{2}}}$; esto es, $Tf\sqrt{2k}=c'\left(\frac{2f^2k}{2kf-g^2}\right)^{\frac{3}{2}}=c'a^{\frac{3}{2}}$. Llámemos ahora a' el ege mayor de otra elipse, cuyo vértice diste f' del focus, y que esté trazada en virtud de una fuerza de impulsion qualquiera combinada con la misma fuerza central dirigida al punto C, y modificada en razon inversa del quadrado de la distancia. Si llamamos k' la cantidad correspondiente á k, tendremos $k'=\frac{kf^2}{f'f'}$, ó $f'\sqrt{k'}=f\sqrt{k}$. Luego una vez que si llamamos T' el tiempo de la revolucion, tambien tenemos $T'f'\sqrt{2k'}=c'(a')^{\frac{3}{2}}$; por ser $f'\sqrt{k'}=f\sqrt{k}$, tambien tendremos $T'f\sqrt{2k}=c'(a')^{\frac{3}{2}}$; luego $T:T'::a^{\frac{3}{2}}:(a')^{\frac{3}{2}}$; y quiere decir, que *las duraciones de las revoluciones son como las raices quadradas de los cubos de los eges mayores*. Luego se puede, con observar los tiempos periódicos de los planetas, conocer la razon que hay entre los eges mayores de sus orbitas.

300 Finalmente, si en la equacion $C'-\frac{ds^2}{2dt^2}=S.P'dz$ hallada antes, substituimos en lugar de $\frac{ds}{dt}$ la velocidad v, y en lugar de C' y $S.P'dz$ sus valores $\frac{g^2-2fk}{2}$, y $-\frac{ffk}{z}$, tendremos $v=\sqrt{\left(g^2-2fk+\frac{ffk}{2}\right)}$. De donde inferiremos con hacer $dv=0$, que la mayor y menor velocidad se verifican en los dos estremos opuestos del ege ma-

mayor, pues hallaremos $\frac{dz}{zz} = 0$, que por medio de la equacion de la curva dará $-dr$ sen $r = 0$, cuya condicion se verifica quando $r = 0$, y $r = 180°$. Fig.

301 No siempre sucede lo propio quando la fuerza central no obra en razon inversa del quadrado de la distancia. El punto de la mayor velocidad que se llama el *Perihelio*, y el de la menor velocidad que llamamos el *Aphelio*, no son siempre fijos, ni directamente opuestos.

302 Hasta aquí no hemos considerado mas que un cuerpo. Supongamos ahora que dos cuerpos M y M' arrojados á los puntos B y D ácia direcciones qualesquiera, se atraygan uno á otro en razon de sus masas, y en razon de una funcion qualquiera de su distancia MM'. Determinaremos las curvas que trazan, y las circunstancias de sus movimientos, suponiendo primero que todo se hace en un mismo plano. 92.

Sea MQ la velocidad que la accion de la masa M' comunicaría á M en un instante, y $M'Q'$ la que M comunicaría á M' en el mismo instante. Será, pues, $M'Q' = \frac{M}{M'} \times MQ$. Tomemos á arbitrio la linea AP; y desde los puntos M, M' bagemos las perpendiculares MP, $M'P'$. Resolvamos las velocidades MQ, $M'Q'$ en velocidades MR, $M'R'$ paralelas á PM, y en velocidades MS, $M'S'$ paralelas á AP; y llamemos AP, x; PM, y; AP', x'; $P'M'$, y'; AC, r; CM, z; $C'M'$, z'. Supongamos á mas de esto que P espresa la velocidad que causaría en un segundo de tiempo la fuerza con que M' obra en M en su situacion actual,

Fig. si dicha fuerza obrase igualmente mientras dura el segundo; tendremos $MQ = Pdt$, $M'Q' = \frac{M}{M'}Pdt$, $MR = \frac{Pydt}{z}$, $MS = \frac{P(x-r)dt}{z}$, $M'R' = \frac{M}{M'}\frac{Py'dt}{z'}$, $M'S' = \frac{M}{M'}\frac{P(r-x')dt}{z'}$, ó porque los triángulos semejantes MPC, $M'P'C$ dán $\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}$, y $\frac{x-r}{z} = \frac{r-x'}{z'}$, tendremos $M'R' = \frac{M}{M'}\frac{Pydt}{z}$, y $M'S' = \frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z'}$. Luego discurriendo del mismo modo que en los egemplos antecedentes, tendremos $\frac{Pydt}{z} = -d(\frac{dy}{dt}) \ldots (A)$, $\frac{P(x-r)dt}{z} = -d(\frac{dx}{dt}) \ldots (B)$, $\frac{M}{M'}\frac{Pydt}{z} = -d(\frac{dy'}{dt}) \ldots (C)$, $\frac{M}{M'}\frac{P(x-r)dt}{z} = d(\frac{dx'}{dt}) \ldots (D)$.

Si en las equaciones (C) y (D) substituimos el valor de $\frac{Pydt}{z}$, y de $\frac{P(x-r)dt}{z}$, sacados de las equaciones (A) y (B), tendremos $-\frac{M}{M'}d(\frac{dy}{dt}) = -d(\frac{dy'}{dt})$, y $-\frac{M}{M'}d(\frac{dx}{dt}) = d(\frac{dx'}{dt})$; é integrando $C \times M' = \frac{Mdy}{dt} - \frac{M'dy'}{dt}$, y $C' \times M' = \frac{Mdx}{dt} + \frac{M'dx'}{dt}$. Pero como $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$ son las velocidades de los cuerpos paralelamente á AP, la suma de los productos $\frac{Mdx}{dt}$, $\frac{M'dx'}{dt}$ ha de ser (161) $= (M+M')g$, llamando g la velocidad del centro comun de gravedad paralelamente á AP. Será, pues, $C' \times M' = (M+M')g$; por la misma razon la equacion $\frac{Mdy}{dt} - \frac{M'dy'}{dt} = C \times M'$, en la qual $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dy'}{dt}$ espresan las velocidades opuestas de M y M' paralelamente á PM, manifiesta que si llamamos g' la velocidad del centro de gravedad paralelamente á PM, tendremos $C \times M' = (M+M')g'$; luego g y g' son cantidades constantes. Luego el centro de gravedad se mueve uniformemente, y en linea recta, cuya consecuencia concuerda con lo dicho (175).

Supongamos, pues, para abreviar, que tomemos la linea de las x en el camino del centro de gravedad que es fa-

facil de determinar (161), por las velocidades primitivamente comunicadas. Entonces será $g' = o$, y $gdt = dr$. Hagamos $x - r = q$; tendremos $dx - dr = dq$, y por consiguiente $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\left(\frac{dr + dq}{dt}\right) = d\left(g + \frac{dq}{dt}\right) = d\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Substituyendo en la equacion (B), tendremos $\frac{Pqdt}{z} = -d\left(\frac{dq}{dt}\right)$, cuya equacion determinará con la equacion (A), ó $\frac{Pydt}{z} = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ la curva, y el movimiento de M respecto del punto mobil C. Por consiguiente imitando lo que practicamos (290), restaremos la primera de estas dos últimas equaciones, multiplicada por y, de la segunda multiplicada por q, y sacaremos $yd\left(\frac{dq}{dt}\right) - qd\left(\frac{dy}{dt}\right) = o$, cuya integral es $\frac{ydq}{dt} - \frac{qdy}{dt} = C''$. Tambien sumaremos la primera, multiplicada por $\frac{dq}{dt}$ con la segunda, multiplicada por $\frac{dy}{dt}$, y sacaremos $\frac{Pqdq + Pydy}{z} = -\frac{dq}{dt}\, d\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, ó porque $qdq + ydy = zdz$ (pues $qq + yy = zz$), $Pdz = -\frac{dq}{dt}\, d\left(\frac{dq}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, cuya integral es $S.Pdz = C''' - \frac{dq^2 + dy^2}{2dt^2}$.

Supongamos ahora el ángulo $ACM = x''$; tendremos $y = z$ sen x'', $q = - z \cos x''$. Si substituimos en lugar de q é y estos valores, saldrá $z^2dx'' = C''dt$, y $S.\ Pdz = C''' - \frac{dz^2 + z^2(dx'')^2}{2dt^2}$. Substituyendo en esta el valor de dt, sacado de la antecedente, sacaremos despues de hechas todas las reducciones, $dx'' = \dfrac{\frac{dz}{zz}}{\sqrt{\left(\frac{2C'''}{(C'')^2} - \frac{2}{(C'')^2}\, S.Pdz - \frac{1}{zz}\right)}}$. Pero como el punto C es constantemente el centro comun de gravedad de M y M', tendremos $MM' = \frac{M + M'}{M'} \times z$. Luego Fig. 92.

Fig. ya que, segun suponemos, *P* es una funcion de MM', P será una funcion de z. Luego nuestra equacion final está toda separada.

Si comparamos esta equacion con la que hallamos (290) para el caso en que el uno de los puntos atrayentes estuviese fijo, se echa de ver que aquí el cuerpo *M* se mueve al rededor del punto mobil *C*, como si este punto estuviera fijo, y atragese tambien proporcionalmente á una funcion de la distancia *MC*, pues *MC* tiene una razon constante con MM'.

La equacion $C''dt = z^2 dx''$ dará dt espresada en z y dz. La misma equacion dá la velocidad angular al rededor de *C*; es á saber, $\frac{dx''}{dt} = \frac{C''}{z^2}$; cuya espresion es de todo punto parecida á la que hallamos (293). Finalmente la equacion $S.\, Pdz = C''' - \frac{dq^2 + dy^2}{2dt^2}$, ó $S.\, Pdz = C''' - \frac{ds^2}{2dt^2}$, llamando s el arco de la curva que *M* traza al rededor de *C*, dá la velocidad en dicha curva, espresada tambien del mismo modo que se hallaría arriba (290). Pero como esta velocidad es conocida, y lo es tambien la de *C* por la equacion $gdt = dr$, ó $\frac{dr}{dt} = g$, será facil hallar la velocidad absoluta de *M*.

Finalmente una vez conocidas la curva que traza *M* al rededor de *C*, y la velocidad de *C*, es facil sacar la posicion de *M* al cabo de un tiempo qualquiera t. Lo que acabamos de decir de *M* manifiesta lo que se debe decir de M'.

303 Si suponemos que los dos cuerpos se atrahen en razon inversa del quadrado de su distancia, y llamamos

k

k la velocidad que comunicaría á M en un segundo de tiempo la accion continua de M', qual sería á la distancia f, tendremos $P = \frac{ffk}{(MM')^2} = \frac{(M')^2}{(M+M')^2} \times \frac{ffk}{rr}$, de donde será facil inferir, discurriendo como antes (295), que cada cuerpo traza al rededor de C una elipse cuyo focus está en C, y cuyos eges se determinarán con facilidad. Fig.

304 Si la ley que sigue la accion de unos cuerpos en otros no fuese dada inmediatamente, no habria inconveniente ninguno en discurrir como si lo fuera. Las condiciones de la cuestion siempre subministrarian tantas equaciones quantas fuesen menester así para determinar las circunstancias del movimiento, como para eliminar la letra ó las letras que representasen la ley de dichas acciones. Supongamos, por egemplo, que dos cuerpos M y M', sin pesantez, atados con un hilo, tracen las curvas BM', DM', en virtud de impulsos primitivos dirigidos en un mismo plano, y de la resistencia que el uno hace al otro por razon de la inestensibilidad del hilo. 93.

En el instante que dichos cuerpos llegan á M y M', imaginaremos (174) que las velocidades MH, $M'H'$ que tendrian si llegasen á ser libres, se resuelven en velocidades Mn, $M'n'$ en la direccion de las curvas, y en velocidades MN, $M'N'$ que sean destruidas. Será, pues, preciso que MN, $M'N'$ sean directamente opuestas, y que (65) $M \times MN = M' \times M'N'$.

Ahora bien, ya que MN ha de ser igual y directamente opuesta á la velocidad que la accion de M' intenta

dar

Fig. dar á M en la direccion del hilo; si llamamos P la velocidad que esta accion continuada uniformemente por espacio de un segundo causaría en M, tendremos $MN = Pdt$, y esta velocidad Pdt, dirigida desde M ácia M', será la que hará variar el movimiento de M; luego tendremos tambien $M'N' = \frac{M}{M'} Pdt$, y como esta ha de ser igual á la velocidad que M causaria en M' en la direccion del hilo, en el instante dt, es la velocidad que hace variar el movimiento de M'. Luego si usando de las mismas denominaciones que antes (302), resolvemos tambien las velocidades Pdt, y $\frac{M}{M'} Pdt$ dirigidas desde M ácia M', y desde M' ácia M, parará el cálculo en unas equaciones que serán de todo punto las mismas. Y si reparamos, fuera de esto, que z es constante, y que por lo mismo $dz = 0$, tendremos quanto necesitamos para determinar el movimiento, y eliminar P. De estas equaciones, manejándolas como arriba (302), inferiremos facilmente que los dos cuerpos andan uniformemente al rededor de su centro comun de gravedad, circunferencias de círculo, mientras dicho centro se mueve tambien uniformemente.

94. 305 Si suponemos que los cuerpos sean pesados, imaginaremos que las velocidades MH, $M'H'$ que tendrian en las direcciones de las tangentes, si llegasen á ser libres, y no obrase en ellos la gravedad, estén combinadas (70) con las velocidades Mk, $M'k'$ que la pesantez intenta darles en un instante, y que Ms, $M's'$ sean las velocidades que entonces tendrian. Despues imagina-

naremos (174) que dichas velocidades estén resueltas Fig.
en velocidades Mn, $M'n'$ á lo largo de las curvas, y en velocidades MN, $M'N'$ que se pierdan. Tendremos, pues, $M \times MN = M' \times M'N'$, estando dirigidas MN y $M'N'$ en la direccion del hilo.

Ahora bien, sea ó no la pesantez de M' la misma que la de M, M' le comunica á M en la direccion del hilo, pero ácia un punto contrario, una velocidad igual á MN, que junta con la velocidad Mk es causa de que en vez de venir á H, viene á n. Así las velocidades que hacen variar el movimiento de M, son la velocidad MN dirigida ácia una parte opuesta, y la velocidad Mk. Por la misma razon las velocidades que hacen variar el movimiento de M', son la velocidad $M'N'$ dirigida ácia una parte opuesta, y la velocidad $M'k'$. Pero discurriendo como antes (304) tendremos $MN = Pdt$, y $M'N' = \frac{M}{M'} Pdt$. Luego si resolvemos las velocidades en las direcciones NM y Mk, y las velocidades ácia $N'M'$ y $M'k'$ en velocidades paralelas á las x y á las y; igualaremos con $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ la suma ó la diferencia de las velocidades paralelas á las x, y con $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ la suma ó la diferencia de las velocidades paralelas á las y, por lo tocante al cuerpo M. Y practicando lo propio respecto de M', si para simplificar mas las operaciones, suponemos que la pesantez sea paralela á las y, tendremos, con llamar p la velocidad que la pesantez dá en un segundo, las equaciones siguientes $-\frac{y}{z} Pdt - pdt = d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $-\left(\frac{x-r}{z}\right) Pdt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $pdt - \frac{y'}{z'} \times \frac{M}{M'} Pdt =$

d

Fig. $d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, $\frac{r-x'}{z'} \times \frac{M}{M'} Pdt = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$. Repararemos á mas de esto, que $\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}$, y $\frac{r-x'}{z'} = \frac{x-r}{z}$, y que $x + x'$ es constante.

Substituyendo en las dos últimas equaciones del movimiento, estos dos valores, y los de $\frac{Pydt}{z}$, y $Pdt\left(\frac{x-r}{z}\right)$ que dán las dos primeras equaciones, sacaremos $pdt + \frac{M}{M'}pdt + \frac{M}{M'} d\left(\frac{dy}{dt}\right) = d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$, y $-\frac{M}{M'} d\left(\frac{dx}{dt}\right) = d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$. De esta última inferiremos que el movimiento del centro de gravedad paralelamente á las x, es uniforme. La antecedente que es lo propio que $(M+M')pdt = M'd\left(\frac{dy'}{dt}\right) - Md\left(\frac{dy}{dt}\right)$, está diciendo que el centro de gravedad obedece á la pesantez del mismo modo que si fuera un cuerpo libre. Luego (274) el centro de gravedad traza una parábola $F'QF$, del mismo modo que si fuera un proyectil arrojado con la velocidad que el centro de gravedad ha tenido al principio, y ácia la misma direccion. Y como las distancias de los dos cuerpos á dicho centro de gravedad son constantes, trazarán por consiguiente al rededor del mismo centro de gravedad circunferencias de círculo, y los trazarán uniformemente.

306 Si fuera mayor el número de los cuerpos; si fue-
95. sen tres, por egemplo, sin pesantez, y atados con los dos hilos MM', MM''; nos figuraríamos (174) que en el instante que los cuerpos M, M', M'' llegan á M, M', M'' las velocidades MH, $M'H'$, $M''H''$ que tendrian en las direcciones de las tangentes, si llegasen á ser libres, se resuelven cada una en otras dos, la una en la direccion de la curva, y la otra que se ha de perder. La direccion de esta última ha de

de estar respecto de cada uno de los dos cuerpos M' y M'' Fig. en la direccion del hilo y respecto del cuerpo M se ha de resolver en otras dos que esten en direcciones de los hilos $M'M$, $M''M$; por manera que si $M''N''$, $M'N'$, Mo, Mq son estas segundas velocidades, hemos de tener $M \times Mq = M' \times M'N'$, y $M \times Mo = M'' \times M''N''$. Y así, si llamamos P la velocidad que engendraría en M en un segundo de tiempo la accion de M' continuada uniformemente, y P' la que M'' engendraría igualmente en M, tendremos $Mq = Pdt$, $Mo = P'dt$, $M'N' = \frac{M}{M'} Pdt$, $M''N'' = \frac{M}{M''} P'dt$.

Si imaginamos despues que cada una de las velocidades qM, oM, $M'N'$, $M''N''$ se resuelva en otras dos, la una paralela á AP, la otra paralela á PM; y llamamos AP, x; PM, y; AP', x'; $P'M'$, y'; AP'', x''; $P''M''$, y''; AC, r; AC', r'; CM, z; CM', z'; $C'M$, z''; $C'M''$, z'''; será facil hallar, imitando las resoluciones antecedentes, la espresion de la velocidad paralelamente á AP y á PM, así respecto de M', como respecto de M'', y las igualaremos con $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dx''}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy''}{dt}\right)$ respectivamente. Por lo que mira á M, la variacion de la velocidad paralelamente á AP, y paralelamente á PM, resultará de otras dos que se originarán de la resolucion de Mq y Mo; por lo qual, lo que aquí hemos de igualar con $d\left(\frac{dx'}{dt}\right)$, y con $d\left(\frac{dy'}{dt}\right)$ es la suma ó la diferencia de los dos conatos paralelos á AP, y de los dos conatos paralelos á PM, segun obraren ácia una misma direccion, ó ácia direcciones contrarias. De aquí se sacarán seis equaciones. Observaremos tambien que los triángu-

Fig. gulos MPC, $M'P'C'$ son semejantes, y que lo son tambien los triángulos MPC', $M''P''C'$. Finalmente las distancias MM', MM'' son constantes. Estas condiciones encierran quanto se necesita para averiguar el movimiento, y las curvas trazadas.

Si los cuerpos fuesen pesados se practicaría lo mismo que antes (305). Esto manifiesta lo que se habría de hacer si fuese mayor el número de los cuerpos.

307 Si las direcciones de los impulsos primitivos que los cuerpos han recibido no estuvieran en un mismo plano, ó si las direcciones de las fuerzas que hacen variar los movimientos no estuvieran todas en un mismo plano; en este caso despues de resuelta la velocidad que cada cuerpo intenta tener, en otras dos, la una que tendrá realmente, y la otra que será aniquilada; se resolverá esta última en otras tantas como fueren menester, á fin de que se verifique el equilibrio en virtud de estas últimas velocidades; despues para sacar las equaciones de las curvas, y del movimiento, se resolverán estas últimas velocidades suponiéndolas dirigidas ácia rumbos opuestos, en otras tres paralelas á tres rectas que se podrán suponer perpendiculares entre sí, y que consideraremos como las ordenadas $x, y, z; x', y', z'$ &c. de las curvas. Y formando respecto de cada cuerpo una suma de todas las que obraren paralelamente á una de dichas lineas, la igualaremos con $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ó $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ &c.

308 Si aplicamos esto á la cuestion que resolvimos (302) suponiendo que los impulsos primitivos hayan

yan tenido sus direcciones en distintos planos, echaremos Fig.
de ver que el movimiento del centro de gravedad es uniforme. Que respecto de un plano qualquiera el movimiento se hace de un modo totalmente parecido á lo que sería si los dos cuerpos se moviesen en dicho plano; y que hay un plano respecto del qual los dos cuerpos suben ó bajan ambos igualmente. Este plano es facil de determinar con imaginar primero cada una de las velocidades comunicadas resueltas en otras dos, la una en dicho plano, la otra perpendicular al plano; hecho esto, si suponemos estas dos últimas iguales, determinaremos la posicion del espresado plano respecto de un plano conocido al qual se hubieren referido las direcciones de las velocidades comunicadas. Así, en el caso actual el movimiento se hace como en el primer caso, con la diferencia de que el plano en que se mueven los dos cuerpos está transportado paralelo á sí mismo, y perpendicularmente, con una velocidad uniforme.

309 Si la causa que hace variar el movimiento, en vez de ser la accion de los cuerpos unos en otros, fuese la resistencia de algun obstáculo inmobil, como quando un cuerpo anda una superficie curva, así en virtud de su pesantez, como de un movimiento primitivamente comunicado, se obrará en virtud de los mismos principios, del modo siguiente.

Sea *ab* la linea que intenta trazar en el instante *dt*, 96.
quando ha llegado á un punto qualquiera *a* de la superficie curva, y *bc* la velocidad que le daría la pesantez en di-

Fig. dicho instante ; *ac* será la línea que trazaría si no fuera por la resistencia de la superficie. Es, pues, preciso que *ac* se resuelva en otras dos velocidades, la una *af* en la direccion de la superficie curva, y la otra *aq* que no surta efecto. Luego *aq* ó su paralela *cf* ha de ser perpendicular á la superficie curva.

Concibamos que pase por *a* un plano orizontal que corte la superficie del sólido en la direccion *ar*; y por *f* un plano vertical que corte la misma superficie en la direccion *fr*, y el plano orizontal en la direccion *ri*. Sea *ai* perpendicular á *ri*, y *ab* la proyeccion de *af* en el plano orizontal *ari*. Desde el punto *c* tírese *cd* perpendicular al plano vertical *rfgi*, y *ce* perpendicular á la vertical *bf*; finalmente desde *d* tírese *df* y *de*. Una vez que el cuerpo, que hubiera venido á *b* si el movimiento que tenia en *a* no hubiese variado, viene al contrario á *f*, así por la velocidad *bc* de la pesantez, como por la resistencia *cf* de la superficie, serán por consiguiente *bc* y *cf* las dos velocidades que hacen variar su movimiento. Imaginemos la velocidad *cf* resuelta en otras dos, la una en la direccion *ce*, y la otra igual y paralela á *ef*; la variacion que produce la velocidad vertical será $bc - ef$; tendremos, pues, $pdt - ef = d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, ó $ef = pdt - d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, llamando z la distancia vertical á que está el cuerpo de un plano orizontal fijo colocado mas arriba del mismo cuerpo.

Resolvamos la velocidad *ce* en otras dos, la una en la direccion *cd*, y la otra igual y paralela á *de*; será *cd* la

va-

variacion de la velocidad paralelamente á *ai*, y será por Fig. consiguiente $cd = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, llamando x la distancia á que estará el cuerpo de un plano vertical paralelo á *rfgi*. Finalmente *de* es la variacion de la velocidad paralela á *ri*, y por lo mismo tendremos $de = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ llamando y la distancia á que el cuerpo está de un plano vertical paralelo á *aig*, que suponemos mas allá de g respecto de f. Pero es facil demostrar que los triángulos *def*, *rfb* son semejantes, y que tambien lo son los triángulos *cde*, *air*.

Sentado esto, tenemos $ai = dx$, $ig = dz$, $gf = dy$. Sea $ir = dy'$; será dy' la diferencia de y tomada en el supuesto de ser z constante. Tendremos, pues, $-d\left(\frac{dy}{dt}\right) : pdt - d\left(\frac{dz}{dt}\right) :: dz : dy' - dy$; y $d\left(\frac{dx}{dt}\right) : -d\left(\frac{dy}{dt}\right) :: dy' : dx$. Luego $-dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right) + dyd\left(\frac{dy}{dt}\right) = pdzdt - dzd\left(\frac{dz}{dt}\right)$, y $dxd\left(\frac{dx}{dt}\right) = -dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Si despues de divididas estas dos equaciones por dt, las sumamos una con otra, sacaremos $\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) = pdz$, é integrando $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2} = pz + C$; ó con llamar ds el arco pequeño af, $\frac{ds^2}{2dt^2} = pz + C$. Pero $\frac{ds}{dt}$ es la velocidad; luego si suponemos que al principio del movimiento el cuerpo no recibió impulso ninguno, tendremos $\frac{ds^2}{2dt^2} = pz$, ó $\frac{ds^2}{dt^2} = 2pz$, y quiere decir, que sea la que fuere la superficie curva, la velocidad es la misma que si el cuerpo hubiese caido libremente de una altura igual.

Hallada ya la equacion de la superficie curva, será facil hallar z y dz en x y dx, y y dy; y la de dy' en x, y y dx. Substituyendo en la equacion $\frac{ds^2}{dt^2} = 2pz + 2C$, y

en

Fig. en la equacion $dxd\left(\frac{dx}{dt}\right) = - dy' d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, y substituyendo en esta en lugar de dt su valor sacado de la primera, tendremos una equacion en x, dx, ddx, y, dy, ddy, que despues de integrada dará la proyeccion de la curva en el plano orizontal. Y para facilitar la integracion, se podrá suponer constante la diferencial que se quisiere.

310 Si el impulso primitivo hubiese sido orizontal, y quisiéremos saber quál debería ser la superficie curva para que prosiguiera el cuerpo moviéndose orizontalmente, en este supuesto será $dz = 0$, y $dy' = dy$; con lo qual las dos equaciones del movimiento quedàn reducidas á esta única $dxd\left(\frac{dx}{dt}\right) = - dy\, d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, que despues de dividida por dt, é integrada dá $dx^2 + dy^2 = 2Cdt^2$, y está diciendo que la velocidad es constante. Pero para que este movimiento se verifique, es preciso que la fuerza centrífuga, y la gravedad se reduzcan á una sola fuerza perpendicular á la superficie curva.

97. Supongamos, pues, que ab represente la fuerza centrífuga; ad, la pesantez; que ae sea la seccion de la curva hecha por un plano vertical perpendicular á la superficie; sea $ef = dz'$, $af = dy''$; y g la velocidad que la fuerza centrífuga comunicaría en un segundo, con su impulso repetido uniformemente. Tendremos $dz' : dy'' :: g : p$. Pero sabemos (275) que $g : p :: h : \frac{1}{2}R$, siendo R el radio de la evoluta en la rebanada orizontal, que el cuerpo traza; luego $h : \frac{1}{2}R :: dz' : dy''$, ó $dy'' = \frac{Rdz'}{2h}$, siendo h la altura de la qual debería caer el cuerpo para adquirir su velocidad actual.

tual. Se echa, pues, de ver que hay una infinidad de superficies curvas en que se puede verificar este movimiento. Si la superficie curva fuese un sólido de resolucion, será R una cantidad constante respecto de cada rebanada, y será $= y.''$ Tendremos, pues, $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$. Fig.

311 Si la curva generatriz fuese un círculo, ó si la superficie curva fuese la de una esfera, cuyo radio fuese a; tendremos $dy'' : dz' :: Qg : y''$, siendo Q el centro. La equacion $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$, se transformará en $\frac{Qg}{(y'')^2} = \frac{1}{2h}$; luego $h = \frac{1}{2} \frac{(y'')^2}{Qg}$; y quiere decir, que para que un cuerpo colgado de un hilo en un punto qualquiera Q pueda hacer oscilaciones cónicas, es preciso que la altura correspondiente á la velocidad de impulsion sea la mitad de la tercera proporcional á la altura, y á la mitad de la base del cono.

De la equacion $dx^2 + dy^2 = 2Cdt^2$ hallada antes, ó $\frac{(ds')^2}{dt^2} = 2C$, llamando s' un arco qualquiera de la circunferencia cuyo radio es y'', sacaremos $2C = 2ph$, ó $C = ph$; luego $\frac{ds'}{dt} = \sqrt{2ph}$, y $t = \frac{s'}{\sqrt{2ph}}$. Luego si llamamos T el tiempo de una revolucion, y suponemos que sea $1 : c$ la razon del diámetro á la circunferencia, sacaremos $T = \frac{2cy''}{\sqrt{2ph}}$; ó substituyendo en lugar de h su valor, $T = 2c\sqrt{\frac{Qg}{p}}$. Quiero decir, una vez que Qg es la altura del cono, que la duracion de las oscilaciones cónicas es siempre la misma, mientras es la misma la altura del cono, sea el que fuere el radio, ó la longitud del péndulo.

Si suponemos que la altura Qg discrepe poco del radio, que llamaremos a, sacaremos con muy corta diferen-

Fig. cia $T = 2c\sqrt{\frac{a}{p}}$, cuya espresion es cabalmente dupla de la que sacamos (252) respecto de las oscilaciones muy pequeñas en un plano vertical. Luego quando las oscilaciones cónicas son pequeñas, son todas de igual duracion, y la duracion de cada una es dupla de la que se haría en un plano vertical.

312 Si nos importára averiguar qual es el sólido de revolucion en el qual el tiempo de una revolucion al rededor del ege fuese siempre el mismo, suponiendo la velocidad comunicada qual es menester para que el mobil pueda moverse en una zona orizontal; observaríamos que la equacion $\frac{dy''}{y''} = \frac{dz'}{2h}$ dá $b = \frac{y''dz'}{2dy''}$. Substituyendo este valor en el de T, sacaremos $T = \frac{2cy''}{\sqrt{\left(\frac{py''dz'}{dy''}\right)}}$ que hemos de suponer igual á una constante b. Luego $\frac{pbby''dz'}{dy''} = 4cc(y'')^2$, y por consiguiente $dz' = \frac{4ccy''dy''}{pbb}$; luego $z' = \frac{2cc(y'')^2}{pb^2}$; cuya equacion está diciendo que la curva generatriz es una parábola, cuyo parámetro es $\frac{pbb}{2cc}$; cuyo vértice está en el punto mas bajo, porque caminamos en el supuesto tácito de que y'' y z' crecen á un tiempo.

313 Si fuese la superficie la de un sólido de revolucion cuyo ege es vertical, será $y = \sqrt{(2rx - xx)}$, siendo r la ordenada de la curva generatriz, y por consiguiente una funcion de z dada por la equacion de dicha curva.

De esta equacion diferenciada, suponiendo z, y por lo mismo r constante, sacaremos $dy' = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{(2rx - xx)}} = \frac{(r-x)dx}{y}$. Si substituimos este valor de dy' en la equacion

dxd

$dxd\left(\frac{dx}{dt}\right) = - dy'd\left(\frac{dy}{dt}\right)$ que hallamos antes, sacaremos Fig.
$yd\left(\frac{dx}{dt}\right) = -(r - x)\, d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, de cuya equacion la integral es $y\left(\frac{dx}{dt}\right) + (r - x)\frac{dy}{dt} = C'$, ó $ydx + (r - x)dy = C'dt$. Pero es facil reparar que $ydx + (r - x)dy$ representa el duplo del sector trazado al rededor del ege, en el tiempo dt, en la proyeccion orizontal; luego sea la que fuere esta proyeccion, el sector trazado será proporcional al tiempo.

La equacion $ydx + (r - x)dy = C'dt$, y la equacion $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} = pz + C$ servirán para determinar todas las circunstancias del movimiento de un cuerpo por la superficie de un sólido de revolucion; y bien se vé que siempre se sacará con facilidad la equacion de la proyeccion, en diferencias primeras.

Del Movimiento de Rotacion, y de los Centros de Percusion y Oscilacion.

314 Sean M, M', M'' unas masas qualesquiera sin 98.
pesantez, y consideradas como puntos, que están en el mismo plano que el punto C, con el qual están atadas, estándolo tambien unas con otras, de modo que no puedan mudar sus distancias recíprocas, y solo puedan girar al rededor de C, ó de un ege que pase por C perpendicular á su plano. Supongamos que dichas masas reciban en su plano impulsos en las direcciones Mm, $M'm'$, $M''m''$, tales que si estuvieran libres, tuvieran velocidades iguales á estas lineas. Vamos á determinar el movimiento que adquirirán.

En virtud del principio sentado (174) resolve-

Fig. remos cada una de las velocidades Mm, $M'm'$, $M''m''$ en otras dos tales que la una pueda obrar, y la otra sea tal, que si las masas M, M', M'' no hubiesen tenido mas que esta velocidad, se hubiesen mantenido en equilibrio.

Es evidente 1.° que como las velocidades que estos cuerpos pueden adquirir, no pueden ser mas que velocidades de rotacion al rededor de C, han de ser perpendiculares á los radios CM, CM', CM''. 2.° Que para que se verifiquen estas velocidades, esto es no se turben unas á otras, han de ser proporcionales á las distancias CM, CM', CM''.

Sentado esto, resuelvo las velocidades comunicadas Mm, $M'm'$, $M''m''$ en velocidades Ms, $M's'$, $M''s''$, que sean las que pueden surtir efecto, y en velocidades Mq, $M'q'$, $M''q''$, con las quales puedan equilibrarse las masas al rededor de C. Tendremos, pues, $Ms : M's' :: CM : CM'$; $Ms : M''s'' :: CM : CM''$, y (95) con tirar las perpendiculares Ct, Ct', Ct'' á las direcciones prolongadas de las velocidades Mq &c. $M \times Mq \times Ct + M' \times M'q' \times Ct' - M'' \times M''q'' \times Ct'' = 0$. Pero de la propiedad de los paralelogramos (90) se saca $M \times Mq \times Ct + M \times Ms \times CM = M \times Mm \times CT$, despues de bajadas las CT, CT', CT'' perpendiculares á las direcciones Mm, Mm', Mm''; esto es, $M \times Mq \times Ct = M \times Mm \times CT - M \times Ms \times CM$. Por la misma razon tendremos $M' \times M'q' \times Ct' = M' \times M'm' \times CT' - M' \times M's' \times CM'$, y $M'' \times M''q'' \times Ct'' = M'' \times M''m'' \times CT'' + M'' \times M''s'' \times CM''$.

Si sumamos una con otra las dos primeras de las tres úl-

últimas equaciones, y restamos la tercera, y tenemos presente la condicion del equilibrio representada por la equacion de los momentos dada poco ha, sacaremos $o = M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT'' - M \times Ms \times CM - M' \times M's' \times CM' + M'' \times M''s'' \times CM''$. Fig.

Pero las proporciones que sacamos poco ha dan $M's' = \frac{Ms \times CM'}{CM}$, $M''s'' = \frac{Ms \times CM''}{CM}$. Substituyendo estos valores, y egecutando las reducciones y transposiciones correspondientes, sacaremos

$$Ms = \frac{M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT''}{M(CM)^2 + M'(CM')^2 + M''(CM'')^2} \times CM.$$

Pero el numerador de esta fraccion que espresa la suma * de los momentos de las fuerzas $M \times Mm$, $M' \times Mm'$ &c. es (95) igual al momento de su derivada; luego si llamamos R esta derivada, y D la distancia á que está del punto C, tendremos esta suma de momentos, $= R \times D$. A mas de esto, como el denominador es la suma de los productos de cada masa multiplicada por el quadrado de su distancia al punto C; si m representa en general una qualquiera de dichas masas, y r su distancia del punto C; podremos representar la suma de dichos productos por esta espresion abreviada $S.mrr$, en la qual $S.$ significa suma; por manera que si llamamos v la velocidad Ms, tendremos Ms ó $v = \frac{R \times D}{S.mrr} \times CM$.

315. Aunque hemos supuesto que todas las fuerzas y to-

* Tomando siempre con signos contrarios los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar en direcciones contrarias.

Fig. todas las partes del systema están en un mismo plano, se echa de ver, y despues lo probaremos, que lo mismo sucedería aun quando estuviesen en planos paralelos unos á otros y perpendiculares al ege de rotacion, con tal que todas las partes del systema se hallasen precisadas á dar la vuelta al rededor de una recta ó ege fijo.

316 Y como todo cuerpo sólido, sea la que fuere su figura, se puede considerar como el conjunto de muchos puntos sólidos unidos unos con otros, podemos afirmar en general, que

99. *Quando un cuerpo* L *de qualquier figura impelido de tales y tantas fuerzas como se quisieren, no puede adquirir mas que un movimiento de rotacion al rededor de un ege fijo* CAB (*que esté dentro ó fuera de dicho cuerpo*); *la velocidad de rotacion que adquirirá uno qualquiera de sus puntos, se hallará con dividir la suma de todos los momentos de todas las dichas fuerzas, ó el momento de su derivada, por la suma de los productos de cada parte de dicho cuerpo multiplicada por el quadrado de su distancia al ege de rotacion, y con multiplicar el cociente por la distancia que hubiere entre el punto cuya velocidad se buscare, y el espresado ege.*

100. 317 Sea *G* el centro de gravedad del cuerpo *L*; concibamos que mientras el punto *M* girando anda en un instante el arco infinitamente pequeño *Ms*, el centro de gravedad *G* ande el arco *Gg*, perpendicular á *CG*; y tiremos por el punto *g*, la linea *gk* paralela é igual á *CG*. En vez de figurarnos que el cuerpo gira al rededor de *C*, podemos ima-

imaginar que se mueve paralelo á sí mismo con una velocidad igual á *Gg*, y que al mismo tiempo sus partes giran al rededor del punto mobil *G* con una velocidad tal que si tomamos *gk* = *GC*, el punto *k* trace el arco *kC* = *Gg*; porque el punto *C* del cuerpo *L* se mantiene igualmente inmobil en estos supuestos. Pero como el cuerpo está entonces libre, la derivada de todos los movimientos de rotacion al rededor del punto mobil *G* es nula (176). Luego la derivada de todos los movimientos que actualmente impelen al cuerpo no se distingue de la fuerza que tendría el cuerpo *L* impelido de la velocidad *Gg*; quiero decir, que dicha fuerza ha de ser perpendicular á *CG*, é igual á $L \times Gg$, siendo *L* la masa del cuerpo. Y como las partes del cuerpo andan arcos semejantes, será $CM : CG :: Ms : Gg$; luego $Gg = \frac{Ms \times CG}{CM}$; luego la fuerza derivada de todos los movimientos de rotacion al rededor de *C*, es $\frac{L \times Ms \times CG}{CM}$.

Fig.

Pero aunque esta derivada es la misma que si estando libre el cuerpo, el centro de gravedad hubiese adquirido la velocidad *Gg*, sin embargo se echa de ver que no pasa por *G*, y pasa por algun punto *R* de la *CG* mas distante de *G*; porque como los puntos mas distantes tienen mayor fuerza, la derivada ha de pasar del mismo lado que el centro de gravedad respecto de *C*, y mas lejos que el mismo centro de gravedad. Llamemos, pues, D' la distancia *CR* á que pasa dicha derivada, y será $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ su momento.

Pero si en el instante que las fuerzas que considerámos antes (314) llegan á obrar en las partes del cuerpo, se

Fig. se les opone á la distancia D' una fuerza igual á la que acabamos de determinar; quiero decir igual al esfuerzo total que causan en dicho cuerpo, es evidente que habrá equilibrio; pero en este caso (95) el momento $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ ha de ser igual al momento $R \times D$; luego ya que (314) $R \times D = \frac{Ms}{CM} S.mrr$, tendremos $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM} = \frac{Ms}{CM} S.mrr$, y por consiguiente $D' = \frac{S.mrr}{L \times CG}$.

Resulta, pues, de todo lo que acabamos de declarar, que

318 *Si muchas fuerzas, cuyo número y direcciones sean las que fueren, estando en planos á los quales sea perpendicular el ege de rotacion, obran en el cuerpo, y no pueden hacerle girar mas que al rededor de dicho ege.* 1.° *la fuerza que comunicaren á dicho cuerpo será igual á la masa del mismo cuerpo multiplicada por la velocidad que adquirirá su centro de gravedad*, cuya velocidad se determina por lo dicho (316). 2.° *Dicha fuerza será perpendicular al plano que pasa por el ege, y por el centro de gravedad.* 3.° *Su distancia al ege será siempre la misma, sean las que fueren las fuerzas y sus direcciones; y será igual á la suma de los productos de cada partícula del cuerpo, multiplicada por el quadrado de su distancia al ege: igual digo á dicha suma dividida por la masa del cuerpo, multiplicada por la distancia á que estuviere del mismo ege el centro de gravedad.*

319 En el supuesto de que represente v la velocidad con que un punto determinado M del cuerpo L intenta gi-

rar

rar en virtud del impulso de quantas fuerzas se quisiesen, ó de su resultante R; si llamamos r la distancia de una partícula qualquiera al ege de rotacion, y m la masa de dicha partícula; será $\frac{rv}{CM}$ su velocidad de rotacion, y $\frac{mrv}{CM}$ la fuerza que adquirirá, y por consiguiente la resistencia que opondrá á R en virtud de su inercia (14 y 212); luego $\frac{mrrv}{CM}$ será el momento de dicha resistencia; luego la suma de los momentos de las resistencias que las partecillas de L oponen al movimiento de rotacion que R les comunica, es $S.\frac{mrrv}{CM}$, ó $\frac{v}{CM}$ $S.mrr$, porque son idénticas estas dos espresiones una vez que v y CM no varían, sea la que fuere la partecilla m que se considera. Fig.

Se echa, pues, de ver que, todo lo demás siendo igual, el conato con que las partes de un cuerpo se resisten al movimiento de rotacion que se las comunica, es tanto mayor, quanto mayor es $S.mrr$.

De aquí en adelante llamaremos $\frac{v}{CM}$ $S.mrr$ el *Momento de Inercia* del cuerpo, y $S.mrr$ el *Esponente del Momento de Inercia*.

320 Dentro de poco diremos como se determina el esponente del momento de inercia en un cuerpo qualquiera; pero despues de determinado este esponente respecto de un ege qualquiera, se determina con facilidad su valor respecto de otro ege, sea el que fuere, paralelo al primero. Como se nos ofrecerá quizá ocasion de considerar el momento de inercia respecto de diferentes eges paralelos, declararemos primero cómo se puede inferir respecto de un ege qualquiera

el

Fig. el valor de su esponente, del valor que tendría respecto de otro ege paralelo al primero.

1101. Sea, pues, AB un ege qualquiera; $A'B'$ otro ege paralelo al primero, y que pase por el centro de gravedad del cuerpo; sea m una partícula qualquiera de dicho cuerpo, y concibamos que por m pase un plano mCC' perpendicular á los dos eges AB, $A'B'$; despues de tiradas las mC, mC', y la linea mP perpendicular á CC', las lineas mC, mC' serán perpendiculares á AB, $A'B'$.

Sentado esto, por lo dicho (II. 213) tendremos $(mC)^2 = (mC')^2 + (CC')^2 + 2CC' \times C'P$. Luego $S.m(mC)^2 = S.m \times (mC')^2 + S.m(CC')^2 + S.\ 2m.\ CC'.C'P$. Pero como la distancia CC' es siempre una misma sea la que fuere la partícula m de que se trata, $S.m(CC')^2$ no es mas que $(CC')^2 S.m$, ó $(CC')^2 \times L$, llamando L la masa del cuerpo. Por la misma razon $S.\ 2m \times CC' \times C'P$ no es mas que $2CC' S.m.C'P$; pero $S.m.\ C'P$ es la suma de los productos de las partículas respecto de un plano que pasa por $A'B'$, esto es, por el centro de gravedad, y ha de ser (117) $= 0$; tendremos, pues, $S.m.(mC)^2 = S.m.(mC')^2 + L \times (CC')^2$. Luego *si conocemos el esponente* S.m.(mC')^2 *del momento de inercia respecto de un ege que pasa por el centro de gravedad, conoceremos el esponente de dicho momento respecto de otro ege qualquiera paralelo al primero, añadiéndole á este el producto de la masa por el quadrado de la distancia que hubiere entre los dos eges.*

En virtud de esto, y de la espresion de la velocidad de

de rotacion que hallamos (314), se echa de ver que *entre todos los eges al rededor de los quales se le puede hacer dar vueltas á un cuerpo en virtud de una fuerza ó impresion qualquiera, los que pasaren por el centro de gravedad serán aquellos al rededor de los quales la velocidad de rotacion será la mayor*; porque el esponente del momento de inercia respecto de un ege que pasa por el centro de gravedad, es menor que respecto de otro ege qualquiera. Fig.

321 Todo lo dicho hasta aquí es de muchísimo uso para hallar el *centro de percusion*, y el *centro de oscilacion* de los cuerpos que están precisados á dar vueltas al rededor de un ege, ó de un punto determinado *C*.

Llamamos *Centro de Percusion* el punto *R* de la línea 102.
CG tirada por el punto fijo *C*, y el centro de gravedad *G*, donde se debería colocar un cuerpo á fin de que recibiera la mayor impresion posible de parte del cuerpo *L* dando vueltas al rededor de *C*. Se echa de ver que dicho punto ha de ser aquel por donde pasa la derivada de los movimientos de rotacion de todos los puntos de *L*; luego dicho punto, ó el centro de percusion se determina por lo dicho (318).

Por *Centro de Oscilacion* entendemos el punto *R* de un 102.
cuerpo ó systema de cuerpos, que está de *C* á una distancia igual á la longitud de un péndulo simple que hiciese sus oscilaciones en el mismo tiempo que dicho cuerpo ó systema de cuerpos hace las suyas en virtud de la gravedad,

Ya-

Fig. Vamos á probar que este centro es el mismo que el centro de percusion.

Con efecto, quando se trata de la pesantez, la fuerza R derivada del impulso que la pesantez comunica á cada parte material de un cuerpo, es igual á toda la masa multiplicada por la velocidad que la pesantez comunica en un instante á toda parte de materia; quiero decir que $R = g \times L$, siendo g dicha velocidad. A mas de esto, dicha derivada R pasa por el centro de gravedad G; y por lo mismo la distancia al punto fijo C, ó al ege que pasa por C, es CN; luego (316) la velocidad de rotacion Ms con que se mueve un punto qualquiera M, quando el cuerpo está entregado al impulso de su pesantez, es $Ms = \frac{g \times L \times CN}{S.mrr} \times CM$; por manera que respecto del centro de gravedad G, es $Gg = \frac{g \times L \times CN}{S.mrr} \times CG$.

Pero á fin de que un péndulo simple cuya longitud sería CR, haga sus oscilaciones en el mismo tiempo que el cuerpo L, es preciso que suponiéndole apartado de la vertical la misma cantidad angular que lo está CR, la velo-
103. cidad que la pesantez le comunica en R perpendicularmen-
102. te á CR, sea la misma que la del punto R; quiero decir que ha de ser á la velocidad de $G :: CR : CG$; pero si resolve-
103. mos la velocidad Rl ó g, que la pesantez dá en un instante á un cuerpo libre, en otras dos; la una Rk en la direccion de la varilla CR, la otra Rr perpendicular á CR, echaremos de ver que $Rl : Rr :: CR : RS :: CG : CN$; luego $g : Rr :: CG : CN$; y por consiguiente $Rr = \frac{g \times CN}{CG}$; es, pues,

pues, preciso que $\frac{g \times CN}{CG} : \frac{g \times L \times CN}{S.mrr} \times CG :: CR : CG$; de donde sacaremos $CR = \frac{S.mrr}{L \times CG}$; el mismo valor cabalmente del centro de percusion. Fig.

322 Ya que todas las fuerzas que obran en el cuerpo L, ó en un systema de cuerpos obligado á girar al rededor de un punto ó ege fijo, causan en dicho cuerpo una velocidad tal que un punto qualquiera M dá vueltas con una velocidad $Ms = \frac{R \times D}{S.mrr} \times CM$; y que por otra parte es evidente que si el cuerpo llegára á dar vueltas al reves con la misma velocidad, haría equilibrio con todas estas fuerzas; hemos de inferir que si mientras un cuerpo está girando con una velocidad que respecto de un punto determinado M sea v, queremos detener su movimiento por medio de una potencia R cuya direccion pase á una distancia $C = D$, será menester que dicha potencia ó su distancia CD sea tal que el momento $R \times D$ sea igual á la velocidad del punto M, dividida por la distancia CM, y multiplicada por la suma de los productos de las partículas por los quadrados de sus distancias á C, ó al ege que pasa por C. Con efecto, ha de ser tal dicha potencia que pueda reproducir la misma velocidad en el cuerpo L suponiéndole en reposo; pero dicha velocidad sería $v = \frac{R \times D}{S.mrr} \times CM$, que dá $R \times D = \frac{v}{CM} S.mrr$. 102.

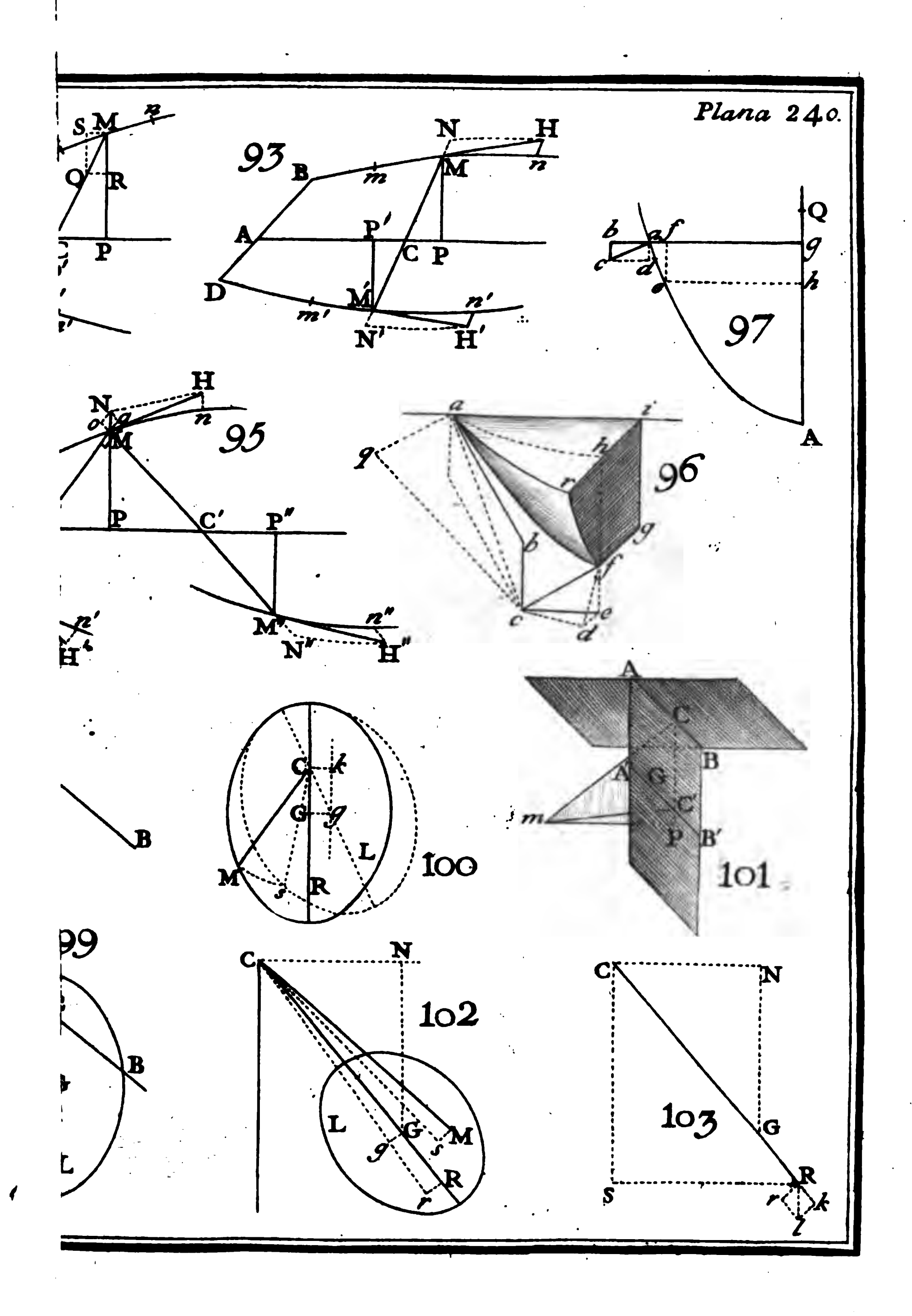
323 Si un cuerpo L, de qualquiera figura, está con tal sugecion que solo pueda dar vueltas al rededor de un punto fijo C, ó de un ege que pase por dicho punto, que podrá estar donde se quisiere, y recibe 104.

per-

Fig. perpendicularmente á su superficie un impulso de un cuerpo *N*, podremos determinar en virtud de los principios antecedentes el movimiento de los dos despues del choque, del modo siguiente.

Sea *V* la velocidad de *N* en la direccion de la perpendicular *TS*, antes del choque; *v* su velocidad despues del choque. $V - v$ será la velocidad, y $N(V - v)$ la cantidad de movimiento que perderá en el choque, y que *L* adquirirá. Esta cantidad de movimiento causará, pues, en *L* una velocidad de rotacion (316) tal que el punto *T*, por egemplo, girará con una velocidad $v' = \frac{N(V-v) \times CS}{S.mrr} \times CT$, con tirar *CS* perpendicular á *TS*.

Figurémonos que el arco infinitamente pequeño *Tm* trazado desde el centro *C*, represente esta velocidad; si formamos sobre la tangente *TA*, y la perpendicular *TS* el paralelogramo *TAmr*, echaremos de ver, substituyendo con el pensamiento, las velocidades *TA* y *Tr* en lugar de la velocidad *Tm*, que la velocidad *TA* de ningun modo puede perjudicar á la velocidad *v* que *N* ha de adquirir; pero que la velocidad *Tr* perjudicaría á la velocidad *v*, si fuese menor que *v*; luego una vez que segun suponemos, *v* es realmente la velocidad con la qual *M* se quedará, es preciso que *Tr* sea $= v$. Pero los triángulos semejantes *CST*, *Trm* dán $CT : CS :: Tm$ ó $v' : Tr$; luego $\frac{v' \times CS}{CT} = Tr = v$, y por consiguiente $v' = \frac{v \times CT}{CS}$; substituyendo, pues, en lugar de v' este valor en la equacion de arriba, tendremos $\frac{v \times CT}{CS} = \frac{N \times (V-v) \times CS}{S.mrr} \times CT$, de donde sale $v = \frac{N \times V \times (CS)^2}{S.mrr + N \times (CS)^2}$; de



Plana 240.
93
95
96
97
100
101
99
102
103

de donde es facil inferir la velocidad de rotacion v'. Y co- Fig.
mo la equacion $v' = \frac{v \times CT}{CS}$ dá $v : v' :: CS : CT$, resulta que v es la velocidad de rotacion del punto S; se sigue, pues, que el punto S gira con la velocidad que le queda á N despues del choque.

324 De todo esto se infiere que para averiguar los movimientos de los cuerpos que giran, es preciso saber determinar el valor de $S.mrr$. Esto se conseguirá con facilidad, conforme lo manifestaremos muy en breve, siempre que la naturaleza del cuerpo pueda cifrarse en equacion. Y quando esta condicion no se verificare, siempre se podrá por lo menos partir el cuerpo en partes como paralelipípedos ó pirámides, &c. cuya naturaleza se puede cifrar en equaciones; y buscando respecto de cada una el valor de $S.mrr$, se sumarán despues todas estas sumas para sacar el valor total de $S.mrr$ correspondiente á todo el cuerpo ó todo el systema de cuerpos de que se tratare. Veamos, pues, cómo se puede averiguar el valor de $S.mrr$ en los cuerpos cuya naturaleza se puede cifrar en equaciones.

Sea AB el ege de rotacion, y concibamos que por AB 105.
pasen dos planos perpendiculares entre sí; sea m una partícula qualquiera del cuerpo, y despues de tirada mC perpendicular á AB, tiremos mS perpendicular al plano AR. Si tiramos la CS, será perpendicular á AB, y por consiguiente al plano PQ. El triángulo rectángulo mSC dará $(Cm)^2 = (CS)^2 + (mS)^2$; luego $S.m(Cm)^2$ ó $S.mrr = S.m \times (CS)^2 + S.m.(mS)^2$. Luego la cuestion se reduce á hallar la suma de

Fig. los productos de las partículas por los quadrados de sus distancias á dos planos que pasan por el ege de rotacion, y son perpendiculares entre sí. Y una vez hallada la espresion algebráica de dicha suma respecto del uno de los planos, será facil hallarla respecto del otro; veamos, pues, cómo se puede hallar en general la suma de los productos de las partículas de un cuerpo por los quadrados de sus distancias á un plano conocido.

Se supondrá dicho cuerpo dividido en rebanadas infinitamente delgadas, paralelas á dicho plano; y suponiendo
106. que Dd representa el grueso de una de dichas rebanadas, llamaremos x la distancia CD al plano que se considera, y s la superficie de la rebanada; entonces, como todos los puntos de esta superficie están del plano PQ á una distancia igual á x, espresará $xxsdx$ los productos de todos los puntos de dicha rebanada por los quadrados de sus distancias al plano, y por consiguiente $S.xxsdx$ será la suma total de estos productos respecto de todo el cuerpo.

Si llamamos x' las distancias al plano perpendicular á PQ que pasa por el ege de rotacion AB, imaginamos el cuerpo dividido en rebanadas paralelas á este nuevo plano, y llamamos s' la superficie de una de las rebanadas, tambien espresará $S.x'x's'dx'$ la suma de los productos de las partículas por el quadrado de su distancia al segundo plano; por manera que $S.xxsdx + S.x'x's'dx'$ será el valor de la suma de los productos de cada parte del cuerpo multiplicada por el quadrado de su distancia al ege AB.

Con

325 Con la mira de aclarar esto con algunos egem- Fig.
plos, supongamos que el cuerpo es un paralelipípedo rec- 107.
tángulo que dá vueltas al rededor del ege *AB* perpendicular al ege del paralelipípedo, y al medio del lado *RS*. Por la naturaleza de este sólido la superficie *S* es constante; por consiguiente la integral $S.xxsdx$ será $\frac{x^3s}{3}$, que quando x fuere igual á la altura h del paralelipípedo, será $\frac{h^3s}{3}$.

Tambien se echa de ver que s' es una cantidad constante, y que por consiguiente $S.x'x's'dx'$ será $\frac{(x')^3s'}{3}$, que quando x' fuere igual á $\frac{1}{2}MN$, ó $\frac{1}{2}h'$, llamando MN, h', será $\frac{1}{8}\frac{(h')^3s'}{3}$, y como el plano que pasa por el ege parte el cuerpo en dos partes iguales, tendremos para las dos mitades $\frac{1}{4}\frac{(h')^3s'}{3}$; luego la suma total de los productos será $\frac{h^3.s}{3} + \frac{(h')^3s'}{12}$.

Luego si quisiésemos hallar el centro de oscilacion, no tendremos mas que hacer (321) sino partir esta cantidad por la masa del paralelipípedo multiplicada por la distancia de su centro de gravedad; esto es, por $hh'b \times \frac{1}{2}h$, llamando *RM*, b. Tendremos, pues, $\frac{2h^3s}{3h^2h'b} + \frac{(h')^3s'}{6h^2h'b}$, ó por ser $s = h'b$, y $s' = hb$, tendremos $\frac{2h}{3} + \frac{(h')^2}{6h}$ que espresará la distancia del centro de oscilacion, y la del centro de percusion.

Si h' fuese muy pequeña respecto de h, será la espresada distancia $= \frac{2h}{3}$. Luego *el centro de oscilacion y el centro de percusion de una linea recta, ó de un paralelogramo que dá vueltas al rededor de uno de sus lados como ege, está á los $\frac{2}{3}$ de la distancia á que está del punto ó ege de rotacion.*

Fig. Por consiguiente la varilla ó barra CA girando al re-
108. dedor del punto fijo C, dará en el clavo T con la mayor fuerza posible, si el clavo correspondiere á la distancia $CP = \frac{2}{3}CA$.

Si la varilla CA girára solo á impulsos de su pesantez, la fuerza que haría en el clavo, sería igual á la masa de la varilla multiplicada por la velocidad que el centro de gravedad G adquiere cayendo á lo largo de BG; esto es (248) con la velocidad que un cuerpo pesado adquiriría cayendo de la altura BD.

326 Sirva de segundo egemplo la esfera. La super-
109. ficie que hemos llamado s, es un círculo cuyo radio es IM, y que llamaremos y. Así, suponiendo que $1:c$ esprese la razon entre el radio y la circunferencia, será $\frac{cy^2}{2} = s$. Llamemos DI, z, y r el radio de la esfera; tendremos $y^2 = 2rz - zz$, y por lo mismo $s = \frac{c}{2}(2rz - zz)$. Sea $DC = a$, será CI ó $x = z + a$, y $dx = dz$; luego $S.x^2sdx$ será $S(z+a)^2 \times \frac{c}{2}(2rz - zz)dz$, ó egecutando las operaciones indicadas $S.\frac{c}{2}(2aarzdz + 4arz^2dz - aaz^2dz + 2rz^3dz - 2az^3dz - z^4dz)$; é integrando, sale $\frac{c}{2}(aarz^2 + \frac{4}{3}arz^3 - \frac{1}{3}aaz^3 + \frac{1}{2}rz^4 - \frac{1}{2}az^4 - \frac{1}{5}z^5)$, que quando $z = 2r$ se reduce á $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{8}{5}r^5)$. Para sacar el valor de $S.x'x's'dx'$, no es menester volver á empezar el cálculo; porque en virtud de la regularidad de la figura de la esfera, saldría de todo punto el mismo; solo hay que suponer que a que espresa la distancia del plano PQ á la superficie, es $-r$, esto es, que dicho plano pasa por el cen-

centro, imaginándole por otra parte perpendicular á su primera posicion; y tendremos $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}r^5 - \frac{8}{3}r^5 + \frac{8}{5}r^5)$ que se reduce á $\frac{c}{2}.\frac{4}{15}r^5$. Juntando, pues, las dos integrales, sale $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$. Fig.

Y como la solidez de la esfera es $\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, y la distancia de su centro de gravedad al plano PQ es $a + r$, dividiendo el resultado que acabamos de sacar, por el producto de las dos últimas cantidades, será la distancia CO del centro de oscilacion y de percusion, $= \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a+r} = \frac{a^2 + 2ar + r^2 + \frac{2}{5}r^2}{a+r} = a + r + \frac{2}{5}.\frac{r^2}{a+r} = CG + \frac{2}{5}\frac{(DG)^2}{CG}$, por donde se echa de ver que el centro de oscilacion y de percusion está mas bajo que el centro mismo de la esfera, y que no se pueden tomar por este sino quando el radio de la esfera es muy chico respecto de la distancia que hay desde el centro G al punto de suspension.

Si la esfera estuviera colgada de una varilla ú hoja, y quisiéramos que entrára en cuenta la masa de la hoja; sería menester tener presente que segun hallamos antes (325) $\frac{h^3s}{3} + \frac{(h')^3s'}{12}$ es la suma de los productos de las partículas de dicha hoja por los quadrados de sus distancias al punto fijo ó al ege. Pero b es lo que aquí llamamos a; á mas de esto, siendo (325) $s = b'b$, y $s' = bb = ab$, tendríamos $\frac{a^3b'b}{3} + \frac{(b')^3ab}{12}$; esta cantidad, y la que corresponde á la esfera se han de multiplicar por las gravedades específicas de los dos cuerpos, si dichas pesanteces fueren diferentes; he-

Fig. cho esto, sumaríamos los dos productos, y llamando p y p' las gravedades específicas de la hoja y de la esfera, sacaríamos $\frac{pa^3h'b}{3} + \frac{p(h')^3ab}{12} + p'\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$, que espresaría la suma de los productos de las partículas de todo el systema, por el quadrado de su distancia al ege. Y dividiendo esta cantidad por la suma $pab'b + p'\frac{c}{2}.\frac{4}{3}r^3$, sacaríamos la distancia del centro de oscilacion.

327 En la práctica bastará dividir el cuerpo en un número crecido de partes, y multiplicar cada una de ellas por el quadrado de su distancia al ege, para sacar con bastante exactitud el valor de $S.mrr$.

328 Hagamos ahora algunas aplicaciones de la regla dada (316).

110. Hemos probado (178) que quando un cuerpo qualquiera L recibe un impulso ácia una direccion que no pasa por su centro de gravedad G, dicho impulso se comunica enteramente al centro de gravedad que se mueve paralelamente á la direccion RS, ácia la qual se le dió el impulso al cuerpo; y que al mismo tiempo las partes de dicho cuerpo giran al rededor del centro de gravedad del mismo modo que si el punto G estuviera fijo. Luego si la figura del cuerpo, y las fuerzas que se le comunican (cuya resultante llamaremos R) son tales que no pueda girar sino al rededor de un solo ege, como este ege pasará indispensablemente por el centro de gravedad, quanto hemos dicho antes se verificará igualmente, suponiendo que r significa en $S.mrr$ la distancia de una partícula qualquiera al ege que pa-

pasa por el centro de gravedad, y por $R \times D$ el momento de la fuerza R tomado respecto del mismo ege, ó la suma de los momentos de todas las fuerzas que obran en el cuerpo, tomada respecto del mismo ege. Esto quiere decir que el centro de gravedad se moverá paralelamente á la direccion de la fuerza R, con una velocidad $= \frac{R}{L}$, siendo L la masa del cuerpo (24). Y si tiramos GS perpendicular á RS, y llamamos v la velocidad de rotacion de S, tendremos $v = \frac{R \times GS}{S.mrr} \times GS$, ó $v = \frac{R \times (GS)^2}{S.mrr}$ (316). Hagamos alguna aplicacion de esta doctrina. Fig.

329 Supongamos que el cuerpo N viniera á chocar con el cuerpo L en una direccion qualquiera CQ, tal sin embargo que no resulte en L mas giracion que al rededor de un solo ege perpendicular al plano que pasa por el centro de gravedad G, y por la recta CS perpendicular al punto de contacto T; vamos á determinar las velocidades despues del choque, y sus direcciones; suponemos que el cuerpo L está en reposo. 111.

Concibamos en el punto de contacto T un plano tangente, é imaginemos la velocidad de N en la direccion CQ resuelta en otras dos, la una ácia CT perpendicular á dicho plano, la otra ácia CI paralela al mismo plano. Si N no tuviera mas velocidad que CI, no haría mas que tocar L de paso, y no le comunicaría ningun movimiento, á lo menos si no hubiera rozamiento. Luego el choque solo se hace en virtud de la velocidad CT. Pero como es facil conocer CT en el paralelogramo $CTAI$, pues todos sus ángulos, y la dia-

Fig. gonal CA son conocidas por el supuesto, consideraremos dicha velocidad CT como conocida, y la llamaremos V. Sea v la velocidad que le quedará á N despues del choque, ácia la misma direccion CT ó CS, y por consiguiente $V - v$ la velocidad que pierde; será, pues, $N(V - v)$ la fuerza que pasa al cuerpo L, la misma que hemos llamado R. Luego (178) el centro de grávedad, y todas las partes del cuerpo adquirirán en la direccion GM paralela á CS, una velocidad $= \frac{N(V-v)}{L} = v'$, llamando v' dicha velocidad.

Pero como la fuerza $N(V - v)$ no pasa por el centro de gravedad G de L, este cuerpo ha de girar al rededor de G del mismo modo que si dicho punto hubiera estado inmobil (178). Llamemos u la velocidad de rotacion que adquirirá el punto S que es el punto donde la GS perpendicular á CS encuentra esta última linea; tendremos (316), pues, $u = \frac{N \times (V-v) \times (GS)^2}{S.mrr}$, ó si representamos GS por D, $u = \frac{N \times D^2 (V-v)}{S.mrr}$.

A mas de esto, reparemos que á fin de que el cuerpo N tenga realmente la velocidad v, es menester que el punto T del cuerpo L, tenga tambien la misma velocidad v en la direccion TS; veamos, pues, con qué velocidad dicho punto ha de caminar en la direccion TS.

Tendrá desde luego la velocidad v' comun á todas las partes L. Fuera de esto, si suponemos que el arco infinitamente pequeño Tm perpendicular á GT representa la velocidad de rotacion del punto T, con imaginar el paralelogramo $Trmn$ sobre las direcciones Tm, TA y TS, será Tr la velocidad de T ácia TS en virtud de su rotacion. Pero de

los

los triángulos semejantes Tmr, GTS inferiremos $GT : GS :: Tm : Tr$; luego $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$. Pero ya que u es la velocidad de rotacion del punto S, tenemos $u : Tm :: GS : GT$, y por consiguiente $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$; luego $Tr = \frac{GS}{GT} \times \frac{u \times GT}{GS} = u$; luego la velocidad total del punto T del cuerpo L, en la direccion CS, es $v' + u$; es, pues, preciso que $v' + u = v$. Fig.

Si de las tres equaciones que acabamos de hallar para espresar las condiciones del movimiento, sacámos los valores de v, u y u', tendremos $v = \frac{N(S.mrr + LD^2)V}{(N+L)S.mrr + LD^2 \times N}$; $v' = \frac{NV\ S.mrr}{(N+L)S.mrr + LD^2 \times N}$; $u = \frac{LND^2 \times V}{(N+L)S.mrr + LD^2 N}$.

Si la distancia GS ó $D = 0$; esto es, si el choque pasare por el centro de gravedad G, en este caso la velocidad de rotacion $u = 0$, las velocidades v, v' serán iguales entre sí, y con $\frac{NV}{N+L}$, y es lo que debe ser (218). Determinada la velocidad v, si la componemos con la velocidad de CI, que no ha padecido alteracion ninguna, tendremos la velocidad absoluta de N, y su direccion despues del choque.

Si antes del choque estuviese en movimiento el cuerpo L, resolveríamos la velocidad de N antes del choque en otras dos, tales que la una fuese igual y paralela á la de E; esta nada contribuiría para el choque; haríamos, pues, uso de la segunda, del mismo modo que le hemos hecho de la velocidad en la direccion CQ, considerando el cuerpo L como en reposo.

Si se compara el valor que acabamos de hallar de u, con el que hallamos (323) de la velocidad de rotacion, teniendo presente lo que r significa en cada caso, pode-

Fig. demos averiguar la diferencia entre la velocidad de rotacion que adquiere un cuerpo libre, y la que adquiere quando está precisado á girar al rededor de un punto ó ege determinado.

112. 330 Quando un cuerpo L, sea la que fuere su figura, despues de recibido un impulso en una direccion RS, que no pasa por el centro de gravedad, toma los dos movimientos de que hemos hablado (328), es facil hacerse cargo de que por un instante se le puede considerar como si no tuviera mas que un solo movimiento; es á saber un movimiento de rotacion al rededor de un punto y ege fijo C, que segun fuere la figura del cuerpo, y la distancia GS á que pasa la fuerza impulsiva, puede estar en el cuerpo mismo ó fuera de él. Con efecto, si mientras la linea GS pasa paralelamente á sí misma desde GS á $G'S'$, imaginamos que gira al rededor del punto fijo G; como los puntos del cuerpo tienen velocidades de rotacion tanto mayores, quanto mas lejos están de G, se echa de ver que habrá en la SG un punto C que habrá trazado desde C' ácia C un arco igual á GG', cuyo arco podemos considerar por un instante como una linea recta; y entonces dicho punto C habrá retrocedido tanto en virtud de su movimiento de rotacion, como habia abanzado paralelamente á GG' con la velocidad comun á todas las partes; luego dicho punto se habrá siempre mantenido en C, y por esta razon le podremos considerar un instante como un punto fijo al rededor del qual girára el cuerpo. Si quisiésemos averiguar la posicion del punto C, repararemos que los arcos CC', $S'I$ que trazan los pun-

puntos C' y S' en un instante, se pueden considerar como lineas rectas perpendiculares á GS, ó paralelas á GG'; pero los triángulos semejantes $CC'G'$, $G'S'I$ dán $G'S' : G'C' :: S'I : CC'$, ó $GS : GC :: S'I : GG'$; y como hemos hallado la velocidad $GC' = \frac{R}{L}$, y la velocidad $S'I = \frac{R \times D^2}{S.mrr}$, tendremos GS ó $D : GC :: \frac{R \times D^2}{S.mrr} : \frac{R}{L}$, de donde sacaremos $GC = \frac{S.mrr}{D \times L}$. Fig.

331 El punto C se llama el *Centro espontaneo de Rotacion*, porque es un centro que el cuerpo toma quasi por sí. Este punto es cabalmente el centro de oscilacion que tendría el cuerpo L, si diese vueltas al rededor de un punto ó ege fijo colocado en S; porque de $CG = \frac{S.mrr}{D \times L}$, inferiremos $CS = GS + \frac{S.mrr}{D \times L} = \frac{L \times GS \times D + S.mrr}{D \times L} = \frac{L \times (GS)^2 + S.mrr}{GS \times L}$; pero $L \times (GS)^2 + S.mrr$ es (320) cabalmente lo que llamamos (321) $S.mrr$; luego el punto C es en este caso el mismo punto R que consideramos (320) antes.

Se echa, pues, de ver que el punto al rededor del qual se puede considerar que un cuerpo gira un instante, no pende del valor de la fuerza ó de las fuerzas que se le aplican á dicho cuerpo; y en general el valor de CG está diciendo que dicho punto está tanto mas lejos, quanto mas cerca del centro de gravedad obra dicha fuerza ó la derivada de todas las fuerzas.

332 Hemos probado (321) que quando un cuerpo gira al rededor de un punto ó ege fijo, su centro de percusion es el mismo que su centro de oscilacion; luego en este caso se averiguan ambos centros por una misma

ope-

Fig. operacion. No sucede lo mismo quando el cuerpo está libre. Con efecto, supongamos que un cuerpo cuya masa es *L*, gire con una velocidad que respecto de un punto puesto á una distancia conocida *a*, sea *v*; y que al mismo tiempo, el centro de gravedad de dicho cuerpo se mueva con la velocidad *u*. Por de contado es evidente que la fuerza derivada de todos los movimientos que animan las diferentes partes de dicho cuerpo, será $L \times u$, ó Lu, esto es, la misma que si el cuerpo no girára (176). En segundo lugar, la distancia á que ha de pasar dicha derivada respecto del centro de gravedad, es con evidencia la misma á la qual una fuerza igual á Lu produciría en el mobil la misma velocidad de rotacion que tiene actualmente; pero (316) la espresion de dicha velocidad v es $\frac{Lu \times D \times a}{S.mrr}$, llamando D la distancia que se busca; luego $v = \frac{LuD.a}{S.mrr}$; y por lo mismo $D = \frac{v}{u} . \frac{S.mrr}{La}$; de donde se sigue que la distancia del centro de percusion de un cuerpo libre pende de la razon que hay entre la velocidad de rotacion, y la velocidad del centro de gravedad; que en particular es nula quando la velocidad de rotacion es nula, y así ha de ser con efecto.

Con esto se puede determinar en qué punto se puede detener un cuerpo libre que se mueve rodando; cuyo punto es al mismo tiempo el centro de percusion de dicho cuerpo, ó el punto donde chocaría con mayor fuerza.

333 Con la mira de hacer otras aplicaciones de esta
113. doctrina supongamos que al cuerpo *P* de qualquiera figura, se le dé un empujon en la direccion *RD* que no pasa por el

el centro de gravedad ; en virtud de lo que precede será fa- Fig.
cil determinar el movimiento que adquirirá, suponiendo por lo menos, conforme suponemos siempre, que no pueda girar sino al rededor de un solo ege. Por los mismos principios podremos determinar tambien qué variedad resultaría en el movimiento de rotacion, si se añadiese ó quitase en una parte qualquiera otro peso p.

Imaginemos una recta AB que pase por el centro de gravedad G del cuerpo P, y que esté fija respecto de dicho cuerpo, y tiremos la pG. En virtud de la adicion del peso p yá no estará en G el centro de gravedad, sino en otro punto G' de la linea pG.

La potencia R que, si no se hubiera añadido el peso p, hubiera hecho girar el cuerpo al rededor de G, le hará girar al rededor de G'; y si el punto G' está mas lejos de la direccion RD de la potencia R, que el punto G, la accion de dicha fuerza para hacer girar al rededor de G' será mayor que la que tendría para hacer girar al rededor de G. Pero como la resistencia procedente de la inercia del cuerpo crece por la adicion del peso p, y pende de la distancia Gp, se echa de ver que la ventaja que puede adquirir la potencia por la adicion del peso p, ha de tener límite, por manera que en cada linea Gp ha de haber un punto, en el qual es mas ventajoso colocar el peso p, que en otro qualquiera. Averiguemos qual es este punto.

Llamemos v la velocidad que ha de adquirir un punto puesto á la distancia 1 respecto de G'; y llamemos r' la dis-

Fig. distancia á que está una partecilla qualquiera de P, del mismo punto G'; y tiremos las perpendiculares GS, $G'S'$. De lo dicho (316), se sigue que $v = \frac{R \times G'S'}{S.mr'r' + p \times (pG')^2}$.* Pero tambien hemos visto (320) que $S.mr'r' = S.mrr + P \times (GG')^2$, siendo r la distancia á que está una partícula qualquiera del centro de gravedad G del cuerpo P; será, pues, $v = \frac{R \times G'S'}{S.mrr + P \times (GG')^2 + p \times (pG')^2}$.

Falta, pues, determinar GG', pG' y $G'S'$.

Prolonguemos pG hasta que encuentre RD en I, y llamemos b el ángulo pIR; llamemos pG, z. Por la naturaleza del centro de gravedad (117) tendremos $P \times GG' = p \times pG'$, y por consiguiente $GG' = \frac{p}{P} \times pG'$; luego $pG = pG' + GG' = pG' + \frac{p}{P} pG' = \frac{P+p}{P} \times pG'$; de donde se saca $pG' = \frac{P}{P+p}\, pG = \frac{P}{P+p}\, z$; y por consiguiente $GG' = \frac{p}{P+p}\, z$. Luego $P \times (GG')^2 + p \times (pG')^2 = \frac{Pp^2}{(P+p)^2} zz + \frac{pP^2}{(P+p)^2} zz = \frac{Pp(P+p)}{(P+p)^2} zz = \frac{Pp}{P+p} zz = Pnzz$, con hacer $\frac{p}{P+p} = n$.

Por lo que mira á $G'S'$; llamemos c la perpendicular GS, y tiremos GK paralela á RD. Del triángulo rectángulo $G'GK$, cuyo ángulo $G'GK = b$, sacaremos $G'K = GG'$ sen $b = nz$ sen b, suponiendo el radio $= 1$. Luego $G'S' = GS + G'K = c + nz$ sen b.

Substituyamos estos valores en el de v, y saldrá $v =$

R

* Nos contentamos con escribir $p \times (pG')^2$; bien que para mayor exactitud debiéramos poner la suma de los productos de las partículas de p, por los quadrados de sus distancias á G'; pero suponemos que el peso p es muy chico respecto de P.

$\frac{R\times(c+nz\,\text{sen}\,h)}{S.mrr+Pnz^2}$, ó $v=\frac{R}{P}\cdot\frac{c+nz\ \text{sen}\ b}{\frac{S.mrr}{P}+nz^2}$; pero si llamamos Fig.
e la distancia que hay entre G y el centro espontaneo C de rotacion (330) tendremos $ce=\frac{S.mrr}{P}$; luego finalmente $v=\frac{R}{P}\cdot\frac{c+nz\,\text{sen}\,h}{ce+nz^2}$.

Esto manifiesta que la adicion del peso p puede hacer variar la velocidad de rotacion por dos causas; la primera por la variacion del ángulo b, ó de la inclinacion de pG respecto de RD; la segunda por la variacion de la distancia pG ó z.

Veamos primero en qual de todos los puntos de una misma linea pG se ha de colocar el peso p, para que la velocidad de rotacion sea la mayor posible. Para esto no hay mas (III. 408) que diferenciar el valor de v, suponiendo z variable, é igualar dicha diferencia con cero. Tendremos, pues, $\frac{R}{P}\frac{[ndz\,\text{sen}\,h(ce+nz^2)-(c+nz\,\text{sen}\,h)2nzdz]}{(ce+nz^2)^2}=0$, que despues de egecutadas las operaciones indicadas, y las reducciones correspondientes se reduce á ce sen $b - nz^2$ sen $b - 2cz = 0$, que es una equacion de segundo grado, de cuya resolucion sacaremos $z=-\frac{c}{n\,\text{sen}\,h}\pm\sqrt{\left(\frac{ce}{n^2\text{sen}^2h}+\frac{ce}{n}\right)}$, ó $z=\frac{1}{u}\left[\frac{-c}{\text{sen}\,h}\pm\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2h}+nce\right)}\right]$.

Estos dos valores de z que se hallan á un tiempo, están diciendo que en cada línea pG hay, prolongándola bastante, dos puntos donde se ha de poner el peso p, á fin de que coadyuve mas al movimiento de rotacion, ó le perjudique menos que si estuviera en otro punto qualquiera de la misma linea.

Pe-

Fig. 113. Pero estos dos puntos corresponden á dos casos diferentes á que pertenece la cuestion propuesta, considerada generalmente. Con efecto, el peso añadido p puede colocarse de tal modo que el centro comun de gravedad G esté, conforme hemos supuesto, al mismo lado que G respecto de la direccion de la fuerza R, y entonces el valor de z es $\frac{1}{n}\left[-\frac{c}{\text{sen } h}+\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}\right]$. Pero el peso p se puede colocar tambien de modo que los dos centros de gravedad G y G' estén al uno y otro lado de la direccion RD; en cuyo caso el valor de z es $\frac{1}{n}\left[-\frac{c}{\text{sen } h}-\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}\right]$.

La primera posicion, que el primer valor de z determina, siempre dará un movimiento de rotacion mas pronto que si no se hubiese añadido el peso p; y la segunda le dará menor. Con efecto, si substituimos en lugar de z estos dos valores en la equacion general $v=\frac{R}{p}\cdot\frac{c+nz\,\text{sen } h}{cc+nz^2}$ de la velocidad de rotacion, se egecutan las reducciones correspondientes, y se divide arriba y abajo por $\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}$, sacaremos $v=\frac{R}{p}\times\frac{\pm n \text{ sen } b}{2\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}\mp\frac{2c}{\text{sen } h}}$. Si tomamos el signo superior, el valor de v es mayor que $\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{e}$ que espresa la velocidad de rotacion, quando se supone p, y por consiguiente $n=0$ en el valor general de v. Porque si supusiéramos $\frac{n \text{ sen } b}{2\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}-\frac{2c}{\text{sen } h}}$ menor que $\frac{1}{e}$, sería preciso (multiplicándolo todo por el primer de-

denominador) que n sen h fuese menor que $\frac{2}{e}\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}-\frac{2c}{e\,\text{sen}\,h}$, ó que n sen $h+\frac{2c}{e\,\text{sen}\,h}$ fuese menor que $\frac{2}{e}\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}$, y quadrando y omitiendo los términos comunes á ambos miembros, sería preciso que n^2 sen$^2 h$ fuese menor que cero, que es un absurdo. No sucede lo propio haciendo uso del segundo valor de z, que por otra parte dá un movimiento de rotacion en direccion contraria. Fig.

Una vez que el denominador del valor reducido de v no es mas que $2nz$, será el mayor valor de v, $v=\frac{R}{P}\times\frac{n\,\text{sen}\,h}{2nz}$; y como este valor es mayor que $\frac{R}{P}\cdot\frac{1}{e}$, se sigue que $\frac{n\,\text{sen}\,h}{2nz}$ es mayor que $\frac{1}{e}$, y que por consiguiente z es menor que $\frac{e}{2}$ sen h. Luego, en general, sea la que fuere la posicion de la linea Gp en la qual se quiere poner el peso p; 113. para que no perjudique á la velocidad de rotacion, es preciso que se coloque á una distancia G menor que la mitad de la distancia del centro espontaneo de rotacion, multiplicada por el seno de la inclinacion de pG respecto de la direccion de la potencia R; y el punto donde coadyuvará mas la velocidad de rotacion queda determinado por el valor $z=\frac{1}{n}\left[-\frac{c}{\text{sen}\,h}+\sqrt{\left(\frac{cc}{\text{sen}^2 h}+nce\right)}\right]$.

Por lo que toca al segundo valor de z, bien que dá una velocidad de rotacion menor que si no se añadiera el peso p, no por esto deja de representar un *máximo*. Manifiesta en el caso de la fig. 114 el lugar donde se debería colocar el peso p para que estorvase lo menos que posible fuera la velocidad de rotacion.

Quanto acabamos de decir es independiente de la po-

Fig. sicion de la linea *pG*. Pero dado caso que se nos preguntára si entre todas las lineas *pG* hay alguna en que sea mas ventajoso colocar el peso *p* que en otra qualquiera ; con mirar el valor general de *v*, esto es, $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \operatorname{sen} h}{ce + nz^2}$, se echa de ver que hay una con efecto. Porque manteniéndose siempre *z* una misma, la espresada cantidad crece á medida que crece el ángulo *b*, pero solo hasta llegar á 90° ; y despues vá men-
113. guando (II. 646) ; luego la posicion mas ventajosa está en la perpendicular tirada por el centro de gravedad *G* del cuerpo *P* á la direccion de la fuerza *R*. Entonces sen $b = 1$, y el valor de *z* se reduce á $z = \frac{1}{n}\left(-c + \sqrt{(cc + nce)}\right)$.

334 Si en igual de añadirle al cuerpo un peso *p*, se le quitára ; averiguaríamos la mudanza que esto ocasionaría en el movimiento de rotacion, haciendo *p*, y por consiguiente *n*, negativa en el valor general $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \operatorname{sen} h}{ce + nz^2}$; con lo qual se transformaría en $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c - nz \operatorname{sen} h}{ce - nz^2}$, en cuya cantidad $n = \frac{p}{P - p}$, y siempre supone que el peso *p* se toma mas allá de *G* respecto de la direccion *RD*. Pero si le tomamos mas acá, entonces *z* será negativa, y tendremos $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \operatorname{sen} h}{ce - nz^2}$.

Esta espresion de *v* está diciendo que mientras fuere *ce* mayor que nz^2, ó mientras tomaremos *z* menor que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$, la velocidad *v* siempre será mayor que si no se quitára el peso *p* ; por manera que quando $ce - nz^2 = 0$, ó quando $z = \sqrt{\frac{ce}{n}}$, dicha velocidad llega á ser infinita. En pasando este término, la velocidad vá menguando, y es ácia una direccion opuesta, porque siendo entonces negativa $ce - nz^2$, el valor de *v* llega tambien á ser negativo. Por consi-

guien-

guiente quitando un peso del mismo lado de la potencia Fig.
respecto del centro de gravedad, se ayuda al movimiento de rotacion, con tal que no se tome á una distancia mayor que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$. Y como suponemos n muy pequeña, $\sqrt{\frac{ce}{n}}$ es muy grande.

Para formar juicio en una vista de todas las variaciones que pueden seguirse en el movimiento de rotacion de añadir ó quitar un peso, hemos de considerar la equacion que representa el valor de v, como si fuera la de una linea curva, cuyas abscisas representa z, y v las ordenadas. Entonces si se trata de un peso añadido, la equacion $v = \frac{R}{P} \cdot \frac{c + nz \text{ sen } h}{ce + nz^2}$, está diciendo que mientras z fuere positiva, v será positiva, pero que despues de haber crecido hasta cierto punto, mengua hasta ser cero, quando z es infinita; de modo que del lado de las z positivas, la curva tiene la fi- 115.
gura que se vé desde *B* á *D*. Pero del lado de las z negativas, v vá primero menguando hasta ser cero, quando $c + nz \text{ sen } b = 0$, ó $z = \frac{-c}{n \text{ sen } h}$; despues v llega á ser negativa; pero crece hasta cierto punto despues del qual mengua hasta ser cero, quando z es infinita y negativa; de suerte que del lado de la z negativas la curva tiene la figura *BCEF*. Por consiguiente hay en realidad dos *máximos*, conforme digimos (333).

En el caso de quitar el peso p, el valor $v = \frac{R}{P} \cdot \left(\frac{c + nz \text{ sen } h}{ce - nz^2}\right)$ está diciendo que v crece mientras z es positiva hasta que $ce - nz^2 = 0$, ó que $z = \sqrt{\frac{ce}{n}}$, y entonces v es infinita; siendo siempre z positiva, y creciendo, v llega á ser negativa, y mengua hasta ser cero quando z es infi-

 ni-

Fig. nita; y así, del lado de las z positivas la curva siempre
116. tendrá la figura que se vé á la derecha de AB; quiero
117. decir, que se levantará al infinito desde B ácia D, siendo $AI = \sqrt{\frac{ce}{n}}$; y mas allá de I se estiende al infinito á lo largo de AR y de IS.

Pero del lado de las z negativas, varía su figura segun los dos casos que pueden ocurrir. Por ser entonces $v = \frac{R}{p} \cdot \frac{c - nz \text{ sen } h}{ce - nz^2}$, puede suceder que llegue $ce - nz^2$ á ser cero antes ó despues que $c - nz$ sen b sea cero. En el primer
116. caso la curva echa un ramo BCF que se estiende al infinito mas arriba de IK, pero sin apartarse de A paralelamente á AK, mas lejos que $\sqrt{\frac{ce}{n}}$. A mas de esto, quando se le dá á z un valor mayor que AK ó $\sqrt{\frac{ce}{n}}$, el valor de v llega á ser negativo hasta que $c - nz$ sen b es cero, esto es, hasta que $z = \frac{c}{n}$. Pasado este término, v es positiva, crece hasta cierto punto L; y despues mengua hasta ser cero, quando z es infinita. Se echa, pues, de ver que si se diferencia el valor de v, y se iguala su diferencial con cero; de los dos valores de z que se sacan, el uno señala un *mínimo* que corresponde al punto C, y el otro un *máximo* que corresponde al punto L.

Pero si $c - nz$ sen b llega á ser cero antes que $ce - nz^2$; entonces se echará de ver, haciendo las mismas consideraciones, que del lado de las z negativas la curva tendrá
117. la figura que representan los ramos infinitos BCF, EO, de modo que no habrá mas *mínimo*, ni *máximo* que cero, y el infinito.

Si

335 Si en vez de añadir ó quitar un peso p, no se hace mas que mudarle de lugar; las variaciones que entonces resultarán en la velocidad de rotacion se determinarán del modo siguiente. Fig.

Supongamos que se le pase de p á p'. Al quitar el peso de p, el centro de gravedad G pasa á g en la prolongacion de pG; y $P - p : p :: pG : Gg$. Quando se coloca despues el peso en p', el centro de gravedad pasa á g' en la linea $p'g$, de suerte que $P - p : p :: p'g' : g'g$; luego si se tiran las pp' y Gg', estas dos lineas serán paralelas, porque de aquí se sigue que $pG : Gg :: p'g' : g'g$. 118.

Sentado esto, si desde g' bajamos la perpendicular gS' á la direccion RD de la potencia R, tendremos (316) con darle á v la misma significacion que antes, $v = \frac{R \times g'S'}{S.mrr + P \times (Gg')^2 - p \times (pg')^2 + p \times (p'g')^2}$. Es, pues, preciso determinar Gg', pg', $p'g'$, y $g'S'$.

Hemos visto poco ha que $P - p : p :: pG : Gg$; luego $P : p :: pg : Gg$; pero los triángulos semejantes $pp'g$, $Gg'g$ dán $pg : Gg :: pp' : Gg'$; luego $P : p :: pp' : Gg'$; luego $Gg' = \frac{p}{P} . pp'$. Desde los puntos p y p' bágense á Cg' las perpendiculares ps, $p't$. Tendremos (II. 213) $(pg')^2 = (pG)^2 + (Gg')^2 + 2g'G \times Gs$, y $(p'g')^2 = (p'G)^2 + (Gg')^2 + 2Gg' \times Gt$. Luego $(pg')^2 - (p'g')^2 = (pG)^2 - (p'G)^2 + 2Gg' \times pp'$, porque $Gs - Gt = st = pp'$. Con esto el valor de v llega á ser $v =$

$$\frac{R \times g'S'}{S.mrr + \frac{p^2}{P} . (pp')^2 + p\left[(p'G)^2 - (pG)^2\right] - 2p \times Gg' - pp'};$$

Fig. ó con substituir en lugar de Gg' su valor, y reducir, $v =$

$$\frac{R \times g'S'}{S.mrr + p\left[(p'G)^2 - (pG)^2\right] - \frac{pp}{P} \cdot (pp')^2}.$$ Pero como

suponemos que el peso p es muy pequeño en comparacion de P, podemos omitir el término $\frac{pp}{P} \times (pp')^2$, y será $v = \frac{R \times g'S'}{S.mrr + p[(p'G)^2 - (pG)^2]}$.

119. Falta ahora determinar $g'S'$. Si por el centro de gravedad G del cuerpo P, tiramos Kn paralela á la direccion RD de la fuerza R, y por los puntos g, g', p' tiramos á Kn las perpendiculares gl, $g'q$, $p'n$; tendremos por la naturaleza del centro de gravedad $(P - p)gl - p \times p'n = P \times g'q$. Pero si llamamos b el ángulo $pGK = gGq$; b', el ángulo $p'GK$; será $gl = Gg$ sen b; esto es $= \frac{p}{P-p} \times pG$ sen b, porque hemos hallado antes $P - p : p :: pG : Gg$. Tambien tendremos $p'n = p'G$ sen b; luego tendremos $g'q = \frac{p \times pG \text{ sen } b - p \times p'G \text{ sen } b'}{P}$; luego si llamamos c la linea GS, tendremos $g'S' = c - \frac{p}{P}(pG \text{ sen } b - p'G \text{ sen } b')$. Luego finalmente si llamamos pG, z; $p'G$, z', substituimos en lugar de $\frac{S.mrr}{P}$, su valor ce, y hacemos $\frac{p}{P} = n$, tendremos $v = \frac{R}{P}\left(\frac{c - nz \text{ sen } b + nz' \text{ sen } b'}{ce + n(z')^2 - nz^2}\right)$.

Con echar una mirada á este valor de v se echa de ver que para que v tenga el mayor valor posible, es preciso que (siendo siempre z y z' unas mismas cantidades) sen $b = -1$, y sen $b' = 1$; quiero decir que el peso p se há de quitar de la perpendicular tirada desde G á la direccion de la fuerza R, mas acá de G respecto de R, y llevarle

mas

mas allá. Entonces el valor de v llega á ser $v = \frac{R}{p} \cdot$ Fig.
$\left(\frac{c + nz + nz'}{ce + n(z')^2 - nz^2}\right)$. Y si quisiéramos averiguar qué razon ha de haber entre z y z' para que sea v la mayor posible, lo conseguiríamos solo con diferenciar dicho valor de v mirando z y z' como variables, é igualar separadamente con cero lo que multiplicare dz, y lo que multiplicare dz'. Pararía el cálculo en una equacion del quarto grado para sacar z ó z'. Pero si consideráramos z ó z' como conocida, diferenciaríamos tratando como variable no mas que una de las dos cantidades z ó z', y entonces no pasaría el cálculo final de una equacion del segundo grado.

Hay muchísimos puntos tales que en ellos se puede colocar un peso de manera que si se añadiera, se quitára, ó se mudára de lugar, daría en cada punto un mismo movimiento de rotacion. Todos estos puntos están en la circunferencia de un círculo. Si se trata, por egemplo, de un peso añadido; como el valor de v es $v = \frac{R}{P}\left(\frac{c + nz \text{ sen } h}{ce + nz^2}\right)$; se buscan todos los puntos donde el peso p se puede colocar de modo que la velocidad de rotacion sea la misma que quando se le coloca á una distancia conocida $GS = b$, y en 120.
una linea que forme con la direccion RD un ángulo conocido a; tendremos $\frac{R}{P}\left(\frac{c + nz \text{ sen } h}{ce + nz^2}\right) = \frac{R}{P}\left(\frac{c + nb \text{ sen } a}{ce + nb^2}\right)$ ó $\frac{c + nz \text{ sen } h}{ce + nz^2} = \frac{c + nb \text{ sen } a}{ce + nb^2}$. Pero si tiramos á la GK paralela á RD, la perpendicular pq; y llamamos pq, y; y Gq, x; tendremos $y = z \text{ sen } b$, y $zz = yy + xx$; luego $\frac{c + ny}{ce + n(xx + yy)} = \frac{c + nb \text{ sen } a}{ce + nb^2}$, que es la equacion del círculo.

Fig.

Del Movimiento de los cuerpos que se mueven en espacios, ó medios resistentes.

336 Todo cuerpo que se mueve en un espacio ó medio que se le resiste, tiene que gastar parte de su movimiento para proseguirle en apartar las partes del medio que atraviesa. Ya llega el caso de tomar en cuenta esta resistencia para dar completa, quanto cabe, la teórica del movimiento, empezando por declarar en general lo que por ahora nos importa saber acerca de la resistencia que oponen los fluidos al movimiento de los cuerpos.

121. 337 Imaginemos que un cuerpo M terminado por una superficie plana AB choca, perpendicularmente á dicha superficie, con una capa de cuerpos infinitamente pequeños, y sin resorte, cuya suma total de las masas sea m. Si llamamos V la velocidad que tiene antes del choque, la que le quedará despues del choque será (218) $\frac{MV}{M+m}$. Luego la que habrá perdido será $V - \frac{MV}{M+m}$, esto es $\frac{mV}{M+m}$, ó solamente $\frac{mV}{M}$, porque suponemos que m es infinitamente pequeña respecto de M. Luego la cantidad de movimiento que M habrá perdido, ó la resistencia que habrá padecido será $\frac{mV}{M} \times M$ ó mV.

Si concebimos ahora que en un tiempo infinitamente pequeño, el cuerpo M anda el trecho infinitamente pequeño Bb, y que á cada paso la cama con que chocó primero se desaparezca para dar lugar á otra con quien el cuerpo choque despues; es evidente que como desde B á

b

b la velocidad no puede menguar sino infinitamente poco, Fig. el menoscabo que padeciere el movimiento del cuerpo al chocar con cada cama, será una misma é igual con mV; luego la suma de las resistencias que le opondrán las capas que encontrare desde *B* á *b*, será mV tomada tantas veces quantas partículas podemos imaginar en el espacio *Bb*. Pero si llamamos *a* el grueso infinitamente pequeño de cada partícula, $\frac{Bb}{a}$ espresará el número de las que pueden caber en *Bb*; será, pues, $mV \times \frac{Bb}{a}$ la espresion de la resistencia que *M* habrá esperimentado en un tiempo infinitamente pequeño. Pero la masa *m* de la primera capa es (30) igual al volumen de dicha capa multiplicado por su densidad; quiero decir, que si llamamos *D* dicha densidad, y *S* la superficie *AB*, será igual á $D \times S \times a$; luego $m = DSa$; luego la resistencia que llamarémos *R*, será $R = DSaV \times \frac{Bb}{a} = DSV \times Bb$.

Pero es de reparar que siendo *Bb* el espacio que anda el cuerpo en un tiempo infinitamente pequeño, que llamaremos dt, durante el qual la velocidad se ha de considerar (57) como uniforme, tendremos $Bb = Vdt$ (57). Luego la resistencia $R = DSV^2dt$.

338 Si nos figuramos que los cuerpos chicos de que hemos hablado, sean las moléculas de que se compone un fluido incompresible, echaremos de ver que teniendo los fluidos, conforme probaremos en el Tomo siguiente, la propiedad de comunicar ácia todas las direcciones la presion que se les aplica; así que las moléculas inmediatas á

AB

Fig. *AB* fueren chocadas, comunicarán el impulso á las partes inmediatas, y las obligarán á escurrirse á lo largo de la superficie del cuerpo, para llenar el espacio que dejaría vacío el cuerpo al pasar de un lugar á otro; y ocuparán el lugar de las que hubieren echado, para hacer lugar á otras que impelidas tambien del cuerpo *M* obrarán despues del mismo modo, y así prosiguiendo. Luego la cantidad DSV^2dt espresa en general la resistencia que esperimenta cada instante el cuerpo *M* moviéndose en un fluido cuya densidad es *D*.

339 Luego si otro cuerpo se moviere con una velocidad u en otro fluido cuya densidad sea D', y le choca perpendicularmente por una superficie s; si llamamos r la resistencia que esperimenta en otro instante dt, será $r = D'su^2dt$. De aquí inferiremos $R : r :: DSV^2dt : D'su^2dt :: DSV^2 : D'su^2$; esto es, *que si dos cuerpos se mueven con velocidades diferentes* V *y* u *en dos fluidos cuyas densidades sean* D *y* D', *y los chocan perpendicularmente por superficies* S *y* s; *las resistencias que esperimentarán en un mismo instante serán como las densidades multiplicadas por las superficies, y multiplicadas por los quadrados de las velocidades.*

340 Luego si fueren unas mismas las superficies y las densidades, las resistencias serán como los quadrados de las velocidades; porque entonces $R : r :: DSV^2dt : DSu^2dt :: V^2 : u^2$. *Luego las resistencias que un mismo cuerpo esperimenta succesivamente de parte de un mismo fluido, en*

ins-

instantes iguales, son como los quadrados de las velocidades. Fig.

341 Es, pues, facil averiguar por la proposicion general que acabamos de sentar (339), la razon entre las resistencias, quando son unas mismas las densidades, ó quando son unas mismas las superficies, ó quando son unas mismas las velocidades. Manifiesta, pues, la equacion $R = DSV^2dt$ que siendo igual todo lo demás, el choque de un fluido es tanto mayor quanto mayor fuere su densidad; por manera que el agua del mar es capaz de mayor choque que el agua dulce; el choque del ayre es mucho menor que el del agua dulce; y la fuerza de que es capaz varía mucho por razon del frio y del calor, que hacen variar mucho su densidad, conforme lo manifestaremos en otro lugar.

342 Si el fluido fuese elástico, todo lo que acabamos de decir sería igualmente cierto, solo habria la diferencia de que el valor absoluto de la resistencia sería duplo, en fuerza de lo probado (223).

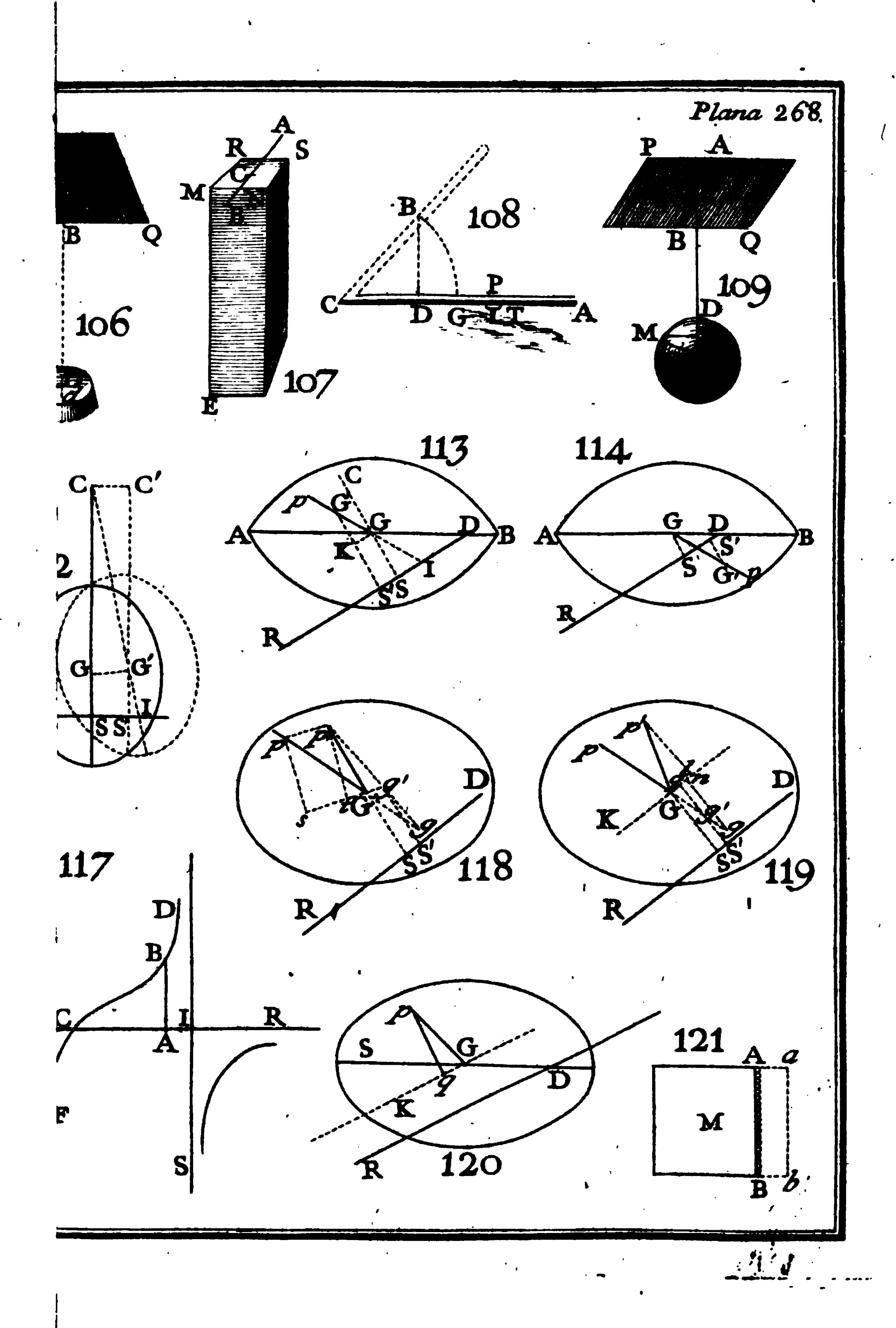
343 Sin embargo, no podemos menos de confesar que la regla dada (223) no es de todo punto exacta y rigurosa; supone que despues del choque queda libre el cuerpo chocado, esto es, que su resorte ó elasticidad obra ó se esplaya libremente. Hay muchos motivos que nos obligan á desconfiar de este supuesto, y por lo mismo no hemos de mirar como cabal la medida que hemos señalado de la resistencia de los fluidos elásticos. No obstante, puede servir dicha medida para comparar las resistencias de dichos fluidos elásticos.

Si

Fig. 344 Si en vez de figurarnos, conforme hemos dicho, que el cuerpo *M* choca en un instante *dt*, con todos los cuerpecillos contenidos en el espacio *ABba*, nos figuramos al contrario que esté inmobil el cuerpo *M*, y que en cada instante *dt* choque con él un volumen de fluido igual á *ABba*, movido con la velocidad *V*, y que se aniquile despues de efectuado el choque; demostraríamos del mismo modo que la cantidad de movimiento infinitamente pequeña que dicho choque comunicará á *M*, será igual á DSV^2dt; y á $2DSV^2dt$ quando el fluido fuere elástico. De donde inferiremos que *lo mismo resulta sea que el cuerpo choque con el fluido, ó que el fluido choque con el cuerpo; con tal que en ambos casos sea una misma la velocidad.*

345 Reduzcamos á medidas mas conocidas el valor que hemos sacado de la resistencia ó del choque de los fluidos.

Si suponemos que *b* sea la altura de que debería caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad *V* con la qual suponemos que *M* se mueve; por lo dicho (54) será $b = \frac{V^2}{2p}$, siendo *p* la velocidad que la pesantez influye en un segundo de tiempo en un cuerpo libre. Si de esta equacion sacamos el valor de V^2 para substituirle en la equacion que sacamos (338) de la resistencia, tendremos $R = 2DSbpdt$; y $R = 4DSbpdt$ quando el fluido fuere elástico. Y como *p* representa la velocidad que la pesantez comunica en un segundo de tiempo; *pdt* es la que comunica en el instante *dt*, por ser las velocidades (50) que comunica en razon de los tiempos. Por otra parte $2DSb$ re-


106
107
108
109
113
114
117
118
119
120
121

representa (30) la masa de un prisma ó de un cilindro del fluido de que se trata, de cuyo prisma la base fuese la superficie S, y $2b$ la altura; esto es, dupla de la altura de que debería caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad con que dicha superficie atraviesa el fluido; luego $2DSbpdt$ representa la cantidad de movimiento que dicho prisma adquiriría en un instante en virtud de la accion libre de la pesantez; quiero decir que representa el peso del mismo prisma. Luego la resistencia que esperimenta un cuerpo que se mueve en un fluido en reposo, ó el choque que un cuerpo en reposo esperimenta de parte de un fluido en movimiento, es igual al peso de un prisma del mismo fluido, cuya base fuese la superficie chocada, y la altura dupla de la altura de que debería caer un cuerpo pesado para adquirir la velocidad con que el cuerpo ó el fluido se mueve actualmente. Y en los fluidos elásticos, la resistencia tiene por medida el duplo del peso del espresado prisma. Fig.

346 Hay mucha variedad entre los Autores que han escrito de la resistencia de los fluidos acerca del valor absoluto de dicha resistencia; algunos le señalan la mitad menor de lo que nosotros le hemos sacado. Los que han apelado á la esperiencia para averiguar este punto tampoco concuerdan unos con otros. Hasta que la esperiencia hable mas claro sobre este asunto, supondremos que la altura del prisma de fluido, cuyo peso mide la resistencia, es á la altura $2b :: n : 1$, siendo n un número incógnito que la esperiencia ha de determinar así respecto de los fluidos elás-

ti-

Fig. ticos, como respecto de los que no lo son. Por consiguiente tendremos generalmente $R = 2DSnbpdt$, ó $R = DSnV^2dt$, una vez que $2pb = V^2$.

Si supusiéramos con algunos Autores que el agua del mar movida con una velocidad de un pie por segundo, y que choca con una superficie de un pie quadrado, hace equilibrio con un peso de una libra y 7 onzas, ó de 23 onzas, se podría determinar n del modo siguiente.

Siendo p la velocidad que un cuerpo adquiere en un segundo, pdt es la que adquiere en un instante dt; por consiguiente $23pdt$ es la cantidad de movimiento que un cuerpo de 23 onzas ha adquirido al cabo de dicho instante. Ha de ser, pues, esta cantidad de movimiento igual al choque que $nDSV^2dt$ espresa; substituyendo un pie quadrado en lugar de S, 1 pie en lugar de V, y en lugar de D la gravedad específica del agua del mar, esto es 72 libras ó 1152 onzas. Luego tendremos $23pdt = nDdt$, ó $n = \frac{23p}{D} = \frac{23}{1152}p$, siendo $p = 30,2$. pies. Por manera que n viene á ser 0,603 con muy corta diferencia.

De la equacion $23pdt = nDdt$ se saca $nD = 23p = 694,6$. Si en lugar de nD substituimos su valor en la espresion $nDSV^2dt$ de la resistencia, sacaremos $R = 23pSV^2dt$ ó $R = 694,6 \times SV^2dt$ que será la espresion de la resistencia del agua del mar; suponiendo que la superficie S se haya medido en pies quadrados, y la velocidad V en pies. Esta cantidad dividida por pdt ó $30,2dt$ espresa la masa cuyo peso haría equilibrio con la resistencia.

Co-

Como dt solo sirve en esta espresion para determinar el efecto de la resistencia respecto de la duracion del instante que es arbitraria, podemos suponer $dt = 1$, y escribir $R = 694,6\, SV^2$. Fig.

Si suponemos con otros Autores que el ayre movido con una velocidad 24 veces mayor que la del agua, dá el mismo choque en una misma superficie, será $V = 24$, $S = 1$. Y por consiguiente si representa n' el valor de n que corresponde al ayre, y D' la densidad del ayre, tendremos $23pdt = n'D'SV^2dt = n'D' \times (24)^2dt$, ó $n'D' = \frac{23p}{(24)^2} = \frac{23p}{576}$; si substituimos este valor de $n'D'$ en la espresion de la resistencia, tendremos respecto del ayre, $R = \frac{23p}{576}SV^2dt$, ó $R = \frac{694,6\, SV^2dt}{576}$, ó $R = \frac{694,6\, SV^2}{576}$. Luego la resistencia ó el choque del ayre sería en este supuesto 576 menor que el del agua. Pero dicha resistencia es muy variable, por ser muy variable la densidad del ayre.

347. Todo esto supuesto, consideremos primero el movimiento rectilineo de los cuerpos en medios resistentes, esto es, de los cuerpos que se mueven sin esperimentar mas alteracion que en su velocidad, permaneciendo siempre en la direccion que siguen desde el principio de su movimiento en virtud del impulso primitivo.

Ya que siempre se puede hallar una superficie plana que espuesta al choque de un fluido esperimente el mismo choque que la superficie de un cuerpo qualquiera que se moviese en el mismo fluido, supondremos conocida dicha superficie, y la llamaremos s. Si en este supuesto llamamos u la velocidad

ac-

Fig. actual de dicho cuerpo, la resistencia que padece será $nDSu^2dt$ (346); esta será la cantidad de movimiento que el cuerpo pierde á cada instante. Luego si llamamos M la masa del cuerpo, $\frac{nDsu^2dt}{M}$ será (24) la velocidad que pierde; luego tendremos $\frac{nDsu^2dt}{M} = -du$, cuya equacion servirá para determinar las circunstancias del movimiento de un cuerpo sin pesantez en un medio resistente. La misma equacion dá $-\frac{du}{u^2} = \frac{nDsdt}{M}$, é integrando $C + \frac{1}{u} = \frac{nDst}{M}$.

Si V representa la velocidad que el cuerpo recibió al principio del movimiento, habrá de ser tal la constante C, que quando fuere $t = 0$, sea $u = V$. Luego $C + \frac{1}{V} = 0$, y por consiguiente $C = \frac{-1}{V}$. Luego finalmente $\frac{1}{u} - \frac{1}{V} = \frac{nDst}{M}$, cuya equacion dará la espresion de la velocidad al cabo de un tiempo qualquiera t.

348 Si quisiéramos averiguar el espacio andado al cabo de un tiempo qualquiera t, llamaríamos x dicho espacio, y sería $dx = udt$ (57). Sacando, pues, de la equacion precedente el valor de u, y substituyéndole en la última, saldrá $dx = \frac{MVdt}{M + nDsVt}$, cuya integral (III. 543) es $x = C' + \frac{M}{nDs} L.(M + nDsVt)$. Y como x es el espacio andado en el tiempo t, la constante C' ha de ser tal que $x = 0$ quando $t = 0$. Tenemos, pues, $0 = C' + \frac{M}{nDs} L.M$, y por consiguiente $C' = \frac{-M}{nDs} L.M$; luego $x = \frac{M}{nDs} L.(M + nDsVt) - \frac{M}{nDs} L.M$; esto es, $x = \frac{M}{nDs} L.(1 + \frac{nDsV}{M} t)$.

El mismo resultado se podría sacar por otros muchos caminos. Por egemplo, si comparamos la equacion $\frac{nDsu^2dt}{M}$

=

$= - du$, con la equacion $pdt = - dv$ correspondiente (58) á los movimientos variados, echaremos de ver que aquí la espresion de la fuerza retardatriz p es $\frac{nDsu^2}{M}$; substituyendo este valor en la equacion $pdt = - d\left(\frac{de}{dt}\right)$ que hallamos (62), resultará $\frac{nDsu^2}{M}dt = - d\left(\frac{de}{dt}\right)$, ó porque hemos llamado x el espacio andado, $\frac{nDsu^2}{M}dt = - d\left(\frac{dx}{dt}\right)$; pero como $u = \frac{dx}{dt}$, la equacion se transformará en $\frac{nDs}{M}\frac{dx^2}{dt^2}dt = - d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, de donde sacaremos $\frac{nDs}{M}dt = - \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$, é integrando, $\frac{nDst}{M} = C + \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$. Pero $\frac{dx}{dt}$ es la espresion de la velocidad; es, pues, preciso que quando $t = 0$, sea $\frac{dx}{dt} = V$, siendo V la velocidad inicial ó primitiva; luego $C = - \frac{1}{V}$; luego $\frac{nDs}{M}t = \frac{-1}{V} + \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, ó $dx = \frac{MVdt}{M + nDsVt}$, cuya equacion despues de integrada dá el mismo resultado que antes. | Fig.

349 Consideremos ahora el movimiento rectilíneo de los cuerpos pesados en los medios resistentes. Sea M la masa del cuerpo; D' su densidad; p la velocidad que la pesantez comunica en el primer segundo á un cuerpo libre; pdt será la velocidad que comunica en un instante dt; y $Mpdt$ será la cantidad de movimiento que tendrá el cuerpo si estuviere libre. Pero esta cantidad de movimiento ha de menguar por dos causas: 1.° porque pierde el cuerpo una parte de su pesantez, pues demostraremos en su lugar que todo cuerpo sólido metido en un fluido pierde una par-

Fig. te de su peso, igual al peso del volumen del fluido cuyo lugar ocupa. 2.° por razon de la resistencia que se origina de la inercia del fluido. La cantidad de movimiento que esta última causa destruye es $nDsu^2dt$. Para determinar la que la primera causa aniquila, es menester determinar primero la masa del volumen del fluido que el cuerpo echa de su lugar, y esto es facil, pues siendo iguales los volúmenes las masas son como las densidades (30). Tendremos, pues, $D' : D :: M :$ es á la masa del fluido echado, que por consiguiente será $\frac{DM}{D'}$. Luego la cantidad de movimiento que esta masa tendría en virtud de la pesantez es $\frac{MD}{D'}pdt$; y así la cantidad de movimiento que el cuerpo adquirirá en realidad cada instante bajando, será $(M - \frac{MD}{D'})pdt - nDsu^2dt$; y la que perderá subiendo será $(M - \frac{MD}{D'})pdt + nDsv^2dt$; luego el incremento de su velocidad será $(1 - \frac{D}{D'})pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt$ en el primer caso; y el decremento subiendo será $(1 - \frac{D}{D'})pdt + \frac{nDsu^2}{M}dt$. Por consiguiente respecto de la bajada, tendremos $(1 - \frac{D}{D'})pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt = du$; y respecto de la subida $(1 - \frac{D}{D'})pdt + \frac{nDsu^2}{M}dt = -du$.

350 Parémonos primero en el primer caso, y llamemos x el espacio andado. Tendremos $u = \frac{dx}{dt}$, y $du = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, y substituyendo en la equacion que corresponde á este caso, se transformará en $\left[(1 - \frac{D}{D'})p - \frac{nDsdx^2}{Mdt^2}\right]dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Hagamos para abreviar $(1 - \frac{D}{D'})p = g$; y $\frac{nDs}{M} = gk^2$; tendremos $(g - gk^2\frac{dx^2}{dt^2})dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$; de donde se saca-

caráa $gdt = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1 - \frac{k^2 dx^2}{dt^2}}$, que podemos transformar (III. 634) Fig.

en $gdt = \frac{\frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1 + k\frac{dx}{dt}} + \frac{\frac{1}{2}d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{1 - k\frac{dx}{dt}}$, de cuya equacion la integral es $gt = C + \frac{1}{2k} L.(1 + k\frac{dx}{dt}) - \frac{1}{2k} L.(1 - k\frac{dx}{dt})$, ó $gt = C + \frac{1}{2k} L.\left(\frac{1 + k\frac{dx}{dt}}{1 - k\frac{dx}{dt}}\right)$. Pero si suponemos que al principio del movimiento no se le haya dado ningun impulso al cuerpo, es preciso que $\frac{dx}{dt}$ que espresa la velocidad, sea cero quando $t = 0$; tendremos, pues, $0 = C + \frac{1}{2k} L.\frac{1}{1}$, de donde sale $C = 0$. Luego $gt = \frac{1}{2k} L.\left(\frac{1 + k\frac{dx}{dt}}{1 - k\frac{dx}{dt}}\right)$, ó $2gkt = L.\left(\frac{1 + k\frac{dx}{dt}}{1 - k\frac{dx}{dt}}\right)$. Luego si llamamos e el número cuyo logaritmo es la unidad (III. 654), tendremos $\frac{1 + k\frac{dx}{dt}}{1 - k\frac{dx}{dt}} = e^{2gkt}$, de donde sacaremos $dx = \frac{dt}{k}\left(\frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}\right) = \frac{1}{k}\,\frac{dte^{2gkt}}{e^{2gkt} + 1} - \frac{1}{k}\,\frac{dt}{e^{2gkt} + 1} = \frac{1}{k} \times \frac{dte^{2gkt}}{e^{2gkt} + 1} - \frac{1}{k}\,\frac{dte^{-2gkt}}{1 + e^{-2gkt}}$, cuya integral (III. 543) es $x = \frac{1}{2gkk} L.(e^{2gkt} + 1) + \frac{1}{2gkk} L.(1 + e^{-2gkt}) + C'$, que se reduce á $2gkkx = L.(e^{2gkt} + 1)\left(\frac{e^{2gkt} + 1}{e^{2gkt}}\right) + C'$, ó á $2gkkx = 2L.\left(\frac{e^{2gkt} + 1}{e^{gkt}}\right) + C'$, ó finalmente $gkkx$

S 2 =

Fig. $= L.\left(\frac{e^{2gkt}+1}{e^{gkt}}\right) + C'$, de cuya equacion se sacará el valor del espacio x andado al cabo de un tiempo qualquiera t, una vez que hayamos determinado la constante C'. Pero esta constante C' ha de ser tal que, quando $t = 0$, sea $x = 0$; luego $0 = L.\left(\frac{1+1}{1}\right) + C'$; luego $C' = - L2$; luego $gkkx = L.\left(\frac{e^{2gkt}+1}{2e^{gkt}}\right)$.

351 Para manifestar cómo se integran las diferenciales parecidas á la propuesta, hemos de recordar que de la regla dada (III. 559) se sigue que dxe^{ax} es integrable, por ser dx la diferencial del logaritmo de e^{ax}, dividida por una constante. Es, pues, $S.\ dxe^{ax} = \frac{dxe^{ax}}{adxLe} = \frac{e^{ax}}{aLe}$. Quando e es el número cuyo logaritmo es 1, la regla se reduce á dividir la diferencial propuesta, por la diferencial del esponente de e.

Si hubiésemos de integrar $x^m dxe^{ax}$, siendo e el número cuyo logaritmo es 1, lo conseguiríamos siempre que fuese m un número entero positivo, con hacer $S.\ x^m dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \&c. + K)$. Pongo por caso que se me ofrezca integrar x^2dxe^{ax}, supondré $S.x^2dxe^{ax}$, $S.x^2dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$. Diferenciando y dividiendo despues por dxe^{ax}, sale $x^2 = Aax^2 + aBx + aE$;
$$+2Ax + B$$

Lue-

Luego $A = 1$, $aB + 2A = 0$, $AE + B = 0$; esto es, $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{-2}{aa}$, $E = \frac{2}{a^3}$; luego la integral de $x^2 dx e^{ax}$ es $e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{aa} + \frac{2}{a^3}\right) + C$. Fig.

Es muy socorrido el número e, cuyo logaritmo es 1, para la integracion de muchas cantidades, particularmente quando llevan logaritmos. Por egemplo, si hubiéramos de integrar $x^n dx(L.x)^m$, haríamos $L.x = z = zLe$; luego $x = e^z$; $dx = dze^z$; y por consiguiente $x^n dx(L.x)^m = z^m dze^{(n+1)z}$, que se integra en el mismo caso, y del mismo modo que la precedente.

352 Por lo que mira á la velocidad, yá que hemos hallado poco há $dx = \frac{dt}{k} \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$; y $\frac{dx}{dt}$ es la espresion de la velocidad u, tendremos $u = \frac{1}{k} \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$, que espresa la velocidad al cabo de un tiempo qualquiera t.

353 Con el fin de reducir estas fórmulas á cosas conocidas, repararemos 1.° que e^{2gkt} representa el número cuyo logaritmo es $2gkt$, porque si llamamos N dicho número, tendremos $2gkt = L.N$, ó $2gktL.e = L.N$, y por consiguiente $N = e^{2gkt}$. 2.° que como los logaritmos de que aquí se trata son aquellos cuyo módulo $= 1$, será preciso (III.480), para valerse de los logaritmos ordinarios multiplicarlos primero por $2,302585 09$. Por consiguiente, siendo dada t, y conocidas g y k, será facil hallar N. Tendremos, pues, $gkkx = L\left(\frac{N+1}{2\sqrt{N}}\right)$, ó $x = \frac{1}{gkk} L.\left(\frac{N+1}{2\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2gkk} L.\left(\frac{(N+1)^2}{4N}\right)$, en cuya equacion el lo-

Fig. garitmo de $\frac{(N+1)^2}{4N}$, tomado en las tablas ordinarias, se ha de multiplicar despues por 2,302585 09.

354 Si en la equacion $(1 - \frac{D}{D'})pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt = du$, que hallamos antes, suponemos $(1 - \frac{D}{D'})pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt = 0$; tendremos $du = 0$, quiero decir que el cuerpo dejará de acelerarse; luego su movimiento llegará á ser uniforme; pero como esta equacion dá $(M - \frac{MD}{D'})pdt = nDsu^2dt$, cuyo primer miembro representa el peso del cuerpo en el fluido, y el segundo espresa la resistencia; llegará á ser uniforme el movimiento quando la resistencia llegáre á ser igual al peso del cuerpo en el fluido.

355 Si no hubiera mas resistencia que la que procede de la inercia del fluido, los cuerpos pesados no llegarian á este estado de uniformidad sino al cabo de un tiempo infinito: esto se comprueba diferenciando la equacion $u = \frac{1}{k}\,\frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$, porque veremos que du no podrá ser cero, sino quando t fuese infinita. Pero las partes del fluido oponen otra especie de resistencia que procede de la adherencia que hay entre ellas; y aunque esta resistencia es mucho menor que la primera, basta sin embargo para ser causa de que se reduzca muy en breve el movimiento á la uniformidad.

Con efecto, la equacion $dx = \frac{dt}{k}\,\frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$ manifiesta que al cabo de un intervalo de tiempo mediano, los in-

incrementos de los espacios se acercan mas y mas á ser proporcionales á los incrementos del tiempo ; porque la fraccion $\frac{e^{2gkt}-1}{e^{2gkt}+1}$ se acerca sin cesar á la unidad. Luego no se ha de añadir mas que una mediana resistencia para reducir el movimiento á la uniformidad. Fig.

356 Como hemos hecho $g=(1-\frac{D}{D'})p$, y $\frac{nDs}{M}=gk^2$; la cantidad gk^2 queda determinada inmediatamente por las cantidades n, D, s, M. Por lo que mira á la cantidad g, si la multiplicamos por M, tendremos $gM=(M-\frac{MD}{D'})p$; pero siendo M la masa del cuerpo, ó su peso en el vacío, $\frac{MD}{D'}$ es su peso en el fluido; luego $M-\frac{MD}{D'}$ es lo que pierde de su peso en el fluido. Luego si llamamos P esta cantidad que es facil de conocer, tendremos $gM=Pp$, y $g=\frac{Pp}{M}$, siendo siempre $p=30, 2$ pies.

357 Consideremos ahora el movimiento del cuerpo quando sube. La equacion $(1-\frac{D}{D'})pdt+\frac{nDsu^2}{M}dt=-du$, que pertenece á este caso, se transforma en $(g+gk^2\frac{dx^2}{dt^2})dt=-d(\frac{dx}{dt})$, llamando x el espacio andado, y egecutando las mismas substituciones que en el caso precedente.

Esta equacion dá $gdt=-\frac{d(\frac{dx}{dt})}{1+k^2\frac{dx^2}{dt^2}}$, ó con multiplicar cada miembro por k, $gkdt=-\frac{d(\frac{kdx}{dt})}{1+k^2\frac{dx^2}{dt^2}}$, y como el segundo miembro es (III. 357) el elemento de un

 ar-

Fig. arco de círculo cuyo radio $=1$, y la tangente $=\frac{kdx}{dt}$; será $\frac{kdx}{dt}=C-$ tang gkt.

Para determinar la constante C, repararemos que quanto $t=0$, la velocidad ó $\frac{dx}{dt}$ ha de ser igual á la velocidad inicial que llamaremos m. Luego $km=C$; luego $\frac{kdx}{dt}=km-$ tang gkt; luego $dx=mdt-\frac{dt}{k}$ tang $gkt=mdt-\frac{dt}{k}\frac{\text{sen}\,gkt}{\cos gkt}$, de cuya equacion la integral es $x=mt+\frac{1}{gk^2}L.\cos gkt$, á la qual no se ha de añadir constante ninguna, porque quando $t=0$, dá $x=0$, conforme ha de ser. Por medio de esta equacion se podrá averiguar á qué altura habrá subido el cuerpo despues de un tiempo dado t.

358 Por lo que toca á la velocidad u; una vez que es igual á $\frac{dx}{dt}$, la equacion $\frac{kdx}{dt}=km-$ tang gkt dará $u=m-\frac{1}{k}$ tang gkt. Luego para determinar al cabo de quánto tiempo dejará de subir el cuerpo, tendremos $m-\frac{1}{k}$ tang $gkt=0$, ó tang $gkt=km$; por donde será facil conocer gkt, y por consiguiente t; cuyo valor substituido en la equacion que dá el valor de x, manifestará á qué altura podrá subir el cuerpo con una velocidad dada m.

359 Antes de concluir este asunto hemos de prevenir que si la resistencia en vez de ser proporcional al quadrado de la velocidad fuese proporcional á una funcion qualquiera de la velocidad, siempre se podrá averiguar la relacion entre el espacio y el tiempo, ó entre la velocidad y el tiempo, yá integrando inmediatamente, yá por medio de las quadraturas. Porque si la resistencia fuera proporcional á una funcion de la velocidad representada por $F(u)$, tendría-

dríamos $dtF(u) = \pm du$; esto es, $dt = \pm \frac{du}{F(u)}$, que es una Fig.
equacion separada, y reducida á las primeras diferencias. Hallada u, se hallará facilmente x, por medio de la equacion $dx = udt$.

360 Determinemos ahora la curva que trazan los proyectiles en un medio resistente. Figurémonos que ABC es la curva que se busca, y que el mobil anda actualmente el arco infinitamente pequeño Mm. Si no fuera por la resis- 122.
tencia y la pesantez, andaría en el instante siguiente la linea mq que está en la prolongacion de Mm. Supongamos que durante este instante la resistencia pueda retardarle la cantidad qn, y que la pesantez pueda hacerle caer la cantidad nm'; llegará, pues, al punto m' en el segundo instante.

Tiremos qr paralela á la vertical MP, y ns paralela á la orizontal AC. Llamemos AP, x; PM, y; el arco AM, s; y supongamos que R y p espresan la resistencia y pesantez del mobil en el fluido; esto es, las velocidades que dichas fuerzas engendrarían en un segundo, si obrasen igualmente cada instante mientras durase todo el segundo. Serán Rdt y pdt las velocidades que engendran en un instante (58). Imaginemos que el decremento de velocidad que produce la resistencia, y que podemos representada por qn, se resuelva en otros dos, el uno vertical qs, y el otro qo orizontal. Tendremos $nq : sq :: Rdt$ es á la diminucion de la velocidad causada por la resistencia en la direccion vertical. Tambien tendremos $nq : sn :: Rdt$ es á la diminucion de velocidad en la orizontal. Luego con tirar

Fig. puesto mas conforme con la naturaleza. Tendremos, pues, $R = \frac{gds^2}{dt^2}$; y las dos equaciones generales serán $\frac{gdyds}{dt} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, y $\frac{gdxds}{dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Supongamos, para abreviar, que dt sea constante, y eliminemos ds; tendremos $\frac{ddx}{dx} = \frac{pdt^2 + ddy}{dy}$, ó $pdt^2 = -dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$; pero la equacion $\frac{gdxds}{dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ó $g\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = -\frac{ddx}{dx^2}$ multiplicada por $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dá $gd\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = -\frac{ddx}{dx^2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, y si en el segundo miembro substituimos $-\frac{pdt^2}{dx}$ en lugar de $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, dá $gd\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = pdt^2\frac{ddx}{dx^3}$, cuyo segundo miembro es integrable cabalmente, y el primero se puede integrar en parte cabalmente, y en parte por logaritmos.

Tendremos, pues, $C - \frac{pdt^2}{2dx^2} = \frac{\frac{1}{2}gdy}{dx}\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{1}{2}gL\left[\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\right]$; de donde sacaremos despues de substituido en lugar de $\frac{pdt^2}{dx}$ su valor, $dx =$

$$\frac{-d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{2C - g\frac{dy}{dx}\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} - gL\left[\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\right]}.$$

Luego si hacemos $\frac{dy}{dx} = z$, sacaremos x quadrando la curva, cuya abscisa fuese z, y la ordenada la unidad dividida por la cantidad en que se transforma el denominador del valor de dx, substituyendo en él z en lugar de $\frac{dy}{dx}$. Finalmente saldrá $y = S.zdx$.

Por lo que mira al tiempo t, una vez que $pdt^2 = -dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$ será $dt = \sqrt{\left[-\frac{dx}{p} + d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}$; y como tenemos dx espresada en $\frac{dy}{dx}$, esto es en z, tendremos t en x por medio de las quadraturas. Finalmente la velocidad u, ó

$\frac{ds}{dt}$

Fig.

$\frac{ds}{dt} = \frac{dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}{\sqrt{\left[-\frac{dx}{p}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]}}$, en cuya cantidad no habrá mas que $\frac{dy}{dx}$ y constantes, si substituyéremos en lugar de $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ su valor sacado de la equacion de la curva que hallamos antes.

Todo esto manifiesta que aunque la curva que los proyectiles trazan en medios resistentes, sea mas complicada que la parábola, se pueden no obstante determinar todos sus puntos, ó por el cálculo, ó por construcciones. Pero como estas construcciones no parece que pueden acomodarse á la práctica, no nos detendremos en manifestarlas. Nos ceñiremos á prevenir, que lo que llamamos g es lo que hemos representado (349) por $\frac{nDs}{M}$; y que lo que aquí representa p es lo que hemos espresado (349) por $(1-\frac{D'}{D})p$; cuya cantidad se puede suponer, sin error substancial, $= p$, quando se trata del ayre, á no ser que fuese el mobil de una materia muy rala.

Hemos supuesto que el cuerpo no dejaba vacío ninguno detrás. Pero si el cuerpo al partir anduviese bastante aprisa para dejar algun vacío, la resistencia en la direccion de la tangente creceria todo lo que es la presion del fluido en la parte anterior del cuerpo.

De las Fuerzas vivas. Pruébase que son iguales al producto de la masa por la simple velocidad.

364 El supuesto sobre que caminamos en todo este tra-

Fig. tratado de ser la fuerza viva, ó la fuerza de los cuerpos que actualmente se mueven, igual al producto de la masa de dichos cuerpos por su velocidad, padeció algun tiempo bastante contradiccion, y le impugnaron con igual sutileza que porfia Matemáticos de grandes créditos, persuadiéndose, y esforzándose en persuadir á los demás que el verdadero valor de las fuerzas vivas es igual al producto de la masa por el quadrado de la velocidad. Aunque cesó dias há esta especie de cisma matemática, no puedo menos de detenerme en probar ahora primero con sólidas, bien que encerradas razones, quan fundada está la opinion que llevamos, para manifestar despues quan errados caminan nuestros contrarios, satisfaciendo plenamente á los mas capciosos y ponderados de sus argumentos.

Consiste, pues, la controversia en saber, si quando un mobil de 6 libras, por egemplo, se mueve con una velocidad como 2, su fuerza es igual al producto de 6×2, ó al producto de 6×4; por manera que en el primer caso la fuerza del espresado cuerpo sería $= 12$, y en el segundo sería $= 24$.

365 No hay duda alguna en que se ha de valuar la fuerza viva por el producto de la masa por la simple velocidad. Porque quando dos cuerpos de masas iguales se mueven con velocidades desiguales, el que camina con mayor velocidad dá con mayor fuerza que el otro en el obstáculo con que ambos tropiezan, y solo le dá mayor golpe por razon de llevarle ventaja al otro en la velocidad; luego el ex-

exceso de la fuerza con que el primero dá en el obstáculo Fig.
debe ser proporcional al exceso de la velocidad. Decir que el golpe es mayor por ser mayor el quadrado de la velocidad del primer cuerpo, es apelar á un ente de razon; las acciones de los cuerpos se han de apreciar por algo que resida en los mismos cuerpos, en estos no hay mas que la simple velocidad, cuyo quadrado es para el caso actual una cosa imaginaria.

366 Supongamos que despues de puestas en medio 123.
del plano *HFCE* unas hojas elásticas ó un *elastro* encogido ó contrahido en cuyos estremos estén colocados dos globos iguales *A*, *B*, se mueva el plano desde *F* ácia *E* con una velocidad $= 1$; es constante que ambos globos tendrán la misma velocidad que el plano, y que por ser iguales entre sí, la fuerza de cada uno en la direccion *FE* será $= 1$. Supongamos ahora que la fuerza del elastro sea tal que si se le suelta obre igualmente al uno y otro lado, y comunique por consiguiente á los globos *A* y *B* una misma fuerza, es á saber, al globo *B* una fuerza en la direccion *EF*, y al globo *A* otra fuerza igual en la direccion *FE*: por lo dicho (8) se echa de ver que aun quando el plano se moviere conforme hemos supuesto desde *F* ácia *E*, el elastro comunicará iguales fuerzas á los dos globos. Sea la fuerza del elastro $= 1$; como este obra en el cuerpo *A* ácia la misma direccion *FE* que sigue ya en virtud del movimiento del plano, el globo *A* adquirirá dos grados de velocidad, es á saber, un grado por el movimiento del plano, y otro gra-

Fig. grado por la accion del elastro; y el globo *B* perderá cabalmente la primera fuerza, por ser contraria é igual al impulso del elastro.

Sentado esto, si las fuerzas siguieran la razon de los quadrados de la velocidad, el globo *A* tendría, despues de soltado el muelle, una fuerza como 4, por ser su velocidad $= 2$, cuyo quadrado $= 4$, y por consiguiente le añadiría el impulso del elastro una fuerza como 3; y por obrar el elastro en el cuerpo *B* con una fuerza $= 1$ no contrarrestaría mas que una fuerza $= 1$, que tiene en virtud del movimiento del plano; por consiguiente obrando el elastro por ambos estremos con igual impulso, á cuyo impulso solo se debe el aumento de la fuerza del cuerpo *A*, le añadiría á este tres grados mas de la que destruiría en el cuerpo *B*: esta consecuencia es un absurdo manifiesto, porque el mismo efecto ha de producir la accion del elastro en los globos, sea que el plano se mueva, ó que esté quieto, y por consiguiente le ha de añadir al globo *A* lo mismo que le quite al globo *B*. Luego las fuerzas de los cuerpos que se mueven no son iguales al producto de la masa por el quadrado de la velocidad, sino por la simple velocidad.

367 Si un cuerpo cuya masa es M moviéndose con la velocidad V chocare con otro m en reposo, de igual masa que él, la fuerza antes del choque sería MV^2, en el supuesto de ser la fuerza viva igual al producto de la masa por el quadrado de la velocidad. Pero de lo probado (218) se sigue que siendo $M = m$ la velocidad de

de cada cuerpo despues del choque ha de ser $= \frac{MV}{M+M} = \frac{1}{2}V$; por consiguiente despues del choque habría de ser la fuerza, segun la opinion que impugnamos, $= \frac{1}{4}MV^2 + \frac{1}{4}MV^2 = \frac{1}{2}MV^2$, esto es, la mitad no mas de lo que era antes del choque, cuya consecuencia es sumamente trabajosa de esplicar para los Partidarios de las fuerzas vivas, que no pueden decir en qué paró la otra mitad que se perdió de la fuerza. La consecuencia que nosotros sacamos es sumamente natural; hallamos despues del choque, conforme debe ser, la misma cantidad de movimiento que antes, pues siendo $= \frac{1}{2}V$ la velocidad de cada masa, la fuerza será $\frac{1}{2}MV + \frac{1}{2}mV$, ó por ser $M = m$, $= \frac{1}{2}MV + \frac{1}{2}MV = MV$, la misma cabalmente que antes del choque. Fig.

Satisfácense los principales argumentos de los Partidarios de las Fuerzas vivas.

368 I. Es constante que si se apartan de la vertical los péndulos B y E hasta que el primero esté en F, y el 124. otro en G, y se entregan despues á su propia gravedad, andarán respectivamente los arcos FB y GE, adquiriendo al tiempo de andarlos tal velocidad (252 y 253) que andarán al otro lado de la vertical arcos iguales con los primeros, cuyos arcos son (40) como los quadrados de las velocidades, pues son los espacios que los péndulos andan. Luego serán las fuerzas de dichos péndulos proporcionales á los quadrados de su velocidad, pues han de ser proporcionales á sus efectos.

Fig. 369 *Resp.* Para dejarse engañar de este argumento es preciso no llevar en cuenta los tiempos que gastan dichos péndulos en andar los espresados espacios. No negamos que en el movimiento uniformemente acelerado los espacios andados en tiempos desiguales son como los quadrados de los tiempos, ó de las velocidades. Pero quando se trata de apreciar las fuerzas, no hemos de considerar otros efectos que los que obran en tiempos iguales, conforme se practíca en el movimiento uniforme. Por egemplo, si un mobil A se mueve en un tiempo T con la velocidad V, y otro mobil B se mueve en el tiempo t con la velocidad u, el espacio que el primero anduviere será (20) VT, y ut será el espacio que anduviere B; y como en el supuesto de ser $V : u :: T : t$ podemos substituir V en lugar de T, y u en lugar de t, resultará verdaderamente que los espacios andados por los dos mobiles serán respectivamente $:: V^2 : u^2$. Pero quando se valúan los espacios andados en el movimiento uniforme, se han de considerar unos mismos tiempos, y dichos espacios, considerados como los efectos que obran las fuerzas, son entonces como la simple velocidad; pues siendo $T = t$, $VT : ut :: V : u$.

370 Lo que acabamos de decir acerca de los espacios andados, se aplica igualmente á qualesquiera efectos que obren las fuerzas, como es vencer obstáculos, superar resistencias, &c; cuyos efectos son proporcionales á la simple velocidad, con tal que se consideren los que se obran en tiempos iguales; pero podrá suceder que sean casualmente

te proporcionales al quadrado de la velocidad, y esta casualidad sucederá siempre que se consideraren los efectos obrados en tiempos diferentes, y hubiere entre los tiempos la misma razon que entre las velocidades. Fig.

371 Para hacerlo patente, recordaremos que la gravedad comunica á los cuerpos que caen iguales grados de velocidad en tiempos iguales, y se los quita á los cuerpos que suben, á lo menos sensiblemente. En lugar de la accion de la pesantez podemos substituir iguales y succesivos impulsos, ó estorvos ocasionados por qualesquiera obstáculos, cuya resistencia ó impulso uniforme ácia una direccion contraria á la de los móbiles, podemos concebir que se junta al cabo de cada espacio cortísimo del mismo modo que esplicamos la aceleracion de los graves, mirando su movimiento como uniforme en *tiempecillos* ó tiempos infinitamente pequeños, y considerando como reunidos los incrementos succesivos. Esto supuesto, supongamos que á un mobil *A* se le dé una velocidad dupla, y á otro mobil *B*, igual con el primero, una velocidad simple. Es constante que la fuerza inicial de estos cuerpos será tal que *A* andará en un mismo tiempo un espacio duplo del que *B* anduviere; porque ni la accion de la gravedad, opuesta á los cuerpos que suben, ni los obstáculos distribuidos uniformemente en todo el espacio no obran en los cuerpos en el primer instantico, segun suponemos, por no estar aplicados; luego al principio las fuerzas son como las velocidades. Y como á las fuerzas no les sobreviene aumento ninguno á medida

Fig. que vencen los obstáculos, no hay mas novedad sino que se ván consumiendo succesivamente; por consiguiente, han de ser las fuerzas proporcionales á la velocidad.

Pero como al cabo del primer tiempecillo los obstáculos empiezan por oponerles á los cuerpos una resistencia uniforme, en el mismo tiempecillo que el cuerpo *B* vence un obstáculo, el cuerpo *A* por razon de su velocidad dupla vence dos, pero succesivamente; por manera, que si dividimos dicho tiempecillo en dos *instanticos* iguales, y en el primer instantico le oponemos al cuerpo *A* el primer obstáculo, y en el mismo instantico se le opone al cuerpo *B* su obstáculo; y en el segundo instantico mientras se le opone al cuerpo *A* el segundo obstáculo, despues de vencido el primero, imaginamos que al cuerpo *B* se le opone todavía el primer obstáculo; podemos considerar que en el mismo tiempecillo, que hemos dividido en dos instanticos, se le oponen succesivamente al cuerpo *A* dos obstáculos, mientras al cuerpo *B* se le opone dos veces el mismo. Pero como el mismo efecto han de obrar los obstáculos, sea que se opongan succesivamente dos iguales, ó que uno de ellos se oponga dos veces; resulta que si el cuerpo *B* pierde en el mismo tiempecillo un grado de velocidad, el cuerpo *A* perderá tambien un grado de velocidad. Y como esto es cierto respecto de todos los tiempecillos, la misma velocidad perderá el cuerpo *A* que el cuerpo *B* en el discurso de un segundo. Ahora bien, si los cuerpos no hubiesen perdido ningun grado de velocidad en el discurso de un segundo,

y

y hubiera andado el cuerpo *B* con la velocidad primitiva Fig. dos varas, por egemplo, ya no andará mas que una vara; y como el cuerpo *A* por razon de su velocidad dupla hubiera andado quatro varas, no andará ya mas que 4 — 1, esto es 3. Pero como despues de aniquilado el movimiento del cuerpo *B* le queda á *A* todavia una velocidad igual á la velocidad inicial de *B*, con la qual *B* ha andado una vara, proseguirá *A* moviéndose, y andará otra vara en otro segundo, y por consiguiente en 2″ andará quatro varas, quando *B* no andará mas que una en un segundo.

372 No es, pues, de estrañar que los espacios andados sean como los quadrados de las velocidades, quando hay entre estas la misma razon que entre los tiempos. Para hacer aun mas patente como los espacios andados en tiempos infinitamente pequeños son como las simples velocidades, es de reparar que en el discurso de todo el primer segundo la razon entre las velocidades es notablemente mayor que la de 2 : 1, y es como 3 : 1. Porque el decremento de las velocidades es continuo, y no se hace de repente al cabo del primer segundo, empieza ya con el mismo segundo. Y si dividimos el segundo de tiempo, y el primer grado de velocidad en un mismo número de partes; quanto mayor fuere su número, tanto mas se acercará la razon de los espacios á la que hemos supuesto entre las velocidades de los móbiles. Si en lugar de 2 y 1 tomáramos 8 y 4, los espacios andados por *A* en el discurso de las 8 partes del tiempo serán como los números 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1;

Fig. quiero decir, que en el primero de los ocho instanticos andará un espacio como 15 &c. Los espacios andados por el mobil *B* en el discurso de las quatro partes del tiempo, serán 7, 5, 3, 1; quiero decir que el espacio andado por el mobil *B* en el primero de los quatro instanticos, será como 7; la razon de 15 : 7 no discrepa sino $\frac{1}{15}$ de la razon de 2 : 1. Si en lugar de 8 y 4 tomásemos 10 y 5, la diferencia no sería mas que $\frac{1}{19}$, y como es tanto menor quanto mayor es el número de las partes, será al fin nula, y será la misma razon que la de 2 : 1. Por consiguiente en tiempecillos infinitamente pequeños, é iguales, los espacios andados son como la simple velocidad. Si consideramos en este asunto instantes infinitamente pequeños, es porque como la velocidad vá siempre variando, solo en el discurso de dichos instanticos se puede considerar como constante, habiendo de ser fijos y constantes los términos de comparacion.

373 II. La composicion de las fuerzas, dicen nuestros contrarios, manifiesta que son proporcionales al quadrado de la velocidad. Porque convienen todos en que si un
125. cuerpo *D* se halla impelido á un tiempo de una fuerza cuya direccion y cantidad sea igual á la linea *DC*, y de otra fuerza cuya direccion y cantidad sea igual á la linea *DA*, el cuerpo adquirirá una fuerza igual en direccion y cantidad á la linea *DB*. Pero si el ángulo *ADC* fuese recto, no podrá ser *DB* la derivada sino porque las fuerzas son como los quadrados de las lineas *DC* y *DA*; pues la igual-

dad

dad no se halla entre la linea *DB*, y la suma de *DA* y *DC*, sino entre el quadrado de *DB*, y la suma de los quadrados de *DA* y *DC*. Fig.

374 *Resp.* Pero si siendo las mismas las cantidades de las fuerzas que impelen al cuerpo, fuesen tales sus direcciones que formando *DC* y *DA* un ángulo agudo, fuese obtuso el ángulo *ADC*, la diagonal del paralelogramo que sobre ellas como lados se formare, espresaría igualmente la fuerza que engendrarian obrando juntos; y como el quadrado de dicha diagonal sería mayor que la suma de los quadrados de *DC* y *DA*, sería la fuerza derivada *DB* mayor que las fuerzas primitivas, y resultaría por consiguiente un absurdo. 126.

375 Siendo las fuerzas proporcionales á la simple velocidad, no se sigue absurdo ninguno de la composicion de las fuerzas. Porque en el supuesto de formar las direcciones de las fuerzas *DA*, *DC* un ángulo agudo, y ser por consiguiente obtuso el ángulo *DCB*, si el cuerpo siguiera sola la direccion de la fuerza *DC*, se apartaría de la diagonal *AB* la distancia *CF*, y por consiguiente la direccion de la fuerza *DC* es algo contraria á la diagonal; si el cuerpo siguiera la direccion *DA*, el cuerpo *D* se desviaría igualmente de la diagonal la cantidad $AE = CF$, y por consiguiente la direccion *DA* es tambien algo contraria á la diagonal. Y como por lo demostrado (I.408) las dos cantidades *AE* y *CF* son iguales y contrarias, se destruyen mutuamente. No queda, pues, del movimiento

Fig. *DC* mas que la parte *DF*, y del movimiento *DA* solo queda la parte *DE*, que obran en la direccion de la diagonal. Pero $DE = FB$ (I. 408); luego las fuerzas restantes serán $DF + FB$ ó *DB*, iguales con la misma diagonal. Y como esto se verifica sea el que fuere el ángulo *CDA*, quedamos libres de incurrir en el absurdo (373) notado.

127. 376 III. Si á una tabla *NM* se le pone una capa de manteca ó sebo hasta la altura *LMNO*, y despues se la dexa caer encima desde la altura *AE* una bola *A*, hará en la manteca un hoyo redondo cuya seccion es *BCD*, y la altura *EC*. Si se deja caer despues encima de la misma tabla desde la altura *FK* dupla de la primera el mismo globo ú otro del todo igual, este hará un hoyo mas grande, cuya seccion es *GHI*, y la altura *KH*. Consta que si se comparan las alturas *EC* y *KH*, se halla ser en el caso propuesto $KH : EC :: \sqrt{2} : 1$, y en general siempre $EC : KH :: \sqrt{AE} : \sqrt{FK}$. El efecto que causan estas caidas es echar de los hoyos la materia que falta; y si llamamos x la altura *EC*, é y la altura *KH*, consta por lo dicho (II. 234) que la solidez del segmento cuya seccion es *BCD* será $\frac{cx^2}{2r}(a - \frac{1}{3}x)$, y la solidez del segmento cuya seccion es *GHI* será $\frac{cy^2}{2r}(a - \frac{1}{3}y)$; serán por consiguiente las cantidades de la materia echada de su lugar como los dos segmentos, esto es como $\frac{cx^2}{2r}(a - \frac{1}{3}x)$ es á $\frac{cy^2}{2r}(a - \frac{1}{3}y)$, ó como $\frac{acx^2}{2r} - \frac{cx^3}{6r}$ es á $\frac{acy^2}{2r} - \frac{cy^3}{6r}$, ó como $\frac{acx^2}{2r} : \frac{acy^2}{2r}$, porque las cantidades $\frac{cx^3}{6r}$ y $\frac{cy^3}{6r}$ se pueden despreciar por razon

zon de su pequeñez. Pero $\frac{acx^2}{2r} : \frac{acy^2}{2r} :: x^2 : y^2$; luego las cantidades de materia echada serán como $x^2 : y^2$, ó $(EC)^2 :: (KH)^2$. Pero como el esperimento dá $EC : KH :: \sqrt{AE} : \sqrt{FK}$, tambien será $(EC)^2 : (KH)^2 :: AE : FK$, y quiere decir que las cantidades de materia echada son como las alturas de que han caido los globos, ó como los espacios que han andado; y como estos espacios son como los quadrados de las velocidades adquiridas al tiempo de andar, serán por consiguiente las cantidades de materia echada, y por lo mismo los efectos de las fuerzas, y las fuerzas mismas de los globos caidos de distintas alturas, como los quadrados de las velocidades. Fig.

377 *Resp.* Nada hay en este argumento que no se pueda esplicar por las prevenciones y principios sentados (369 y sig.). Asi como las velocidades que echan de su lugar la materia cuya ausencia ocasiona los hoyos, no se adquieren en un mismo tiempo, tampoco se consumen ó destruyen en un mismo tiempo, y hay entre los tiempos en que se destruyen la misma razon que entre los tiempos en cuyo discurso se adquieren. Las cantidades de materia echada en el tiempo total y desigual son verdaderamente como los quadrados de la velocidad, pero no las cantidades de materia echadas en un mismo tiempecillo igual. Es una casualidad el ser aquí los efectos como los quadrados de las velocidades; porque las cavidades son en razon compuesta de los tiempos, y las velocidades del mismo modo que los espacios; y como los tiempos son como

las.

Fig. las velocidades, dicha razon compuesta será por consiguiente la de los quadrados de la velocidad.

378 IV. Consta por esperiencia, que si un cuerpo de una masa $= 3$ vá á chocar con una velocidad $= 8$ con un cuerpo en reposo cuya masa $= 9$, el cuerpo chocado caminará despues del choque en la direccion del cuerpo chocante, con una velocidad $= 4$, y el cuerpo chocante volverá atrás con la misma velocidad $= 4$. Sentado esto, si las fuerzas fueran como los productos de las masas por las simples velocidades, la cantidad de movimiento, ó las fuerzas serían despues del choque en el esperimento propuesto $9 \times 4 + 3 \times 4 = 48$, y antes eran no mas que $8 \times 3 = 24$, cuya diferencia parece muy estraña y aun absurda. Pero si la medida de las fuerzas es el producto de las masas por los quadrados de las velocidades, será una misma la cantidad de movimiento antes y despues del choque, pues antes será $3 \times 8^2 = 192$, y despues será $9 \times 4^2 + 3 \times 4^2 = 192$.

379 *Resp.* La diferencía que aquí se repára entre la fuerza antes del choque, y la fuerza despues del choque, no es nada estraña, procede de la elasticidad de los cuerpos con que se hizo el esperimento; es muy natural despues de lo dicho (223) que en virtud de la elasticidad llegue á ser despues del choque la fuerza dupla de lo que era antes.

380 V. Quando un mobil pasa del reposo á un movimiento de determinada velocidad, antes de adquirir toda entera la velocidad con la qual prosigue moviéndose, pasa por

por todos los grados intermedios de velocidad. Supongamos, por egemplo, que empiece á caer un cuerpo grave, y adquiera la velocidad *BC* en el discurso del tiempo que dura su caida, representado por *AC*; al principio despues del tiempecillo infinitamente pequeño *Ad* adquiere la velocidad *nd* (porque siendo conforme suponemos *nd* paralela á *BC*, será *AC* : *CB* :: *Ad* : *nd*); al cabo del segundo tiempecillo *de*, la velocidad *eo*; al cabo del tercer tiempecillo *ef*, la velocidad *fp* &c. Luego todas las velocidades intermedias hasta *BC* son como las lineas paralelas á la misma *BC*, y si el tiempo *AC* estuviere dividido en un número infinito de partes *nd*, *oe*, *pf*..... *mx*, será tambien infinito el número de dichas paralelas, y todas ellas compondrán el triángulo *Amx*, y las lineas *nd*, *xm*.... *BC* no se distinguirán del triángulo *ABC*. Por consiguiente todas las velocidades intermedias hasta *xm* en el tiempo *Am* son á todas las velocidades intermedias hasta *BC* en el tiempo *AC*, como el triángulo *Amx* al triángulo *ACB*. Fig. 128.

Sentado esto, es facil probar que la fuerza aceleratriz ha de ser como las velocidades intermedias. Porque al cabo del tiempecillo *Ad* el mobil se mueve ya con la velocidad *nd*; luego para que se acelere despues de dicho tiempecillo, ha de ser la fuerza mayor que la que movia con la velocidad *nd*, pues si fuera igual no obraría en el mobil, debiendo el mobil estar como en reposo respecto de la fuerza aceleratriz. Luego para que en el tiempo *de* adquiera el mobil la velocidad *oe*, ha de ser la fuerza aceleratriz como *oe*; y para que en el tiempo *ef* el mobil adquiera la velocidad *fp*, ha

de

Fig. de ser la potencia aceleratriz como *pf* &c. Por consiguiente la fuerza aceleratriz ha de crecer tambien como las líneas *nd*, *oe*, *pf* &c. y debe estar en la razon del triángulo *Amx* al triángulo *ACB*; y como las fuerzas de los cuerpos son como las fuerzas que obran en ellos, tambien la fuerza de un grave que cae en el tiempo *Am* es á la fuerza del que cae en el tiempo *AC*, como el triángulo *Amx* es al triángulo *ACB*, esto es como $(xm)^2 : (BC)^2$. Pero *xm* y *BC* son las velocidades que los dos móbiles adquieren en los tiempos *Am* y *AC*; luego las fuerzas que adquieren los cuerpos al caer son como los quadrados de las velocidades.

381 *Resp.* Primeramente es falso que el cuerpo al pasar del reposo al movimiento pase por todos los grados intermedios de la velocidad que llega á adquirir; esto solo se verifica en los cuerpos elásticos, y en los graves, pero no en los cuerpos duros que se mueven de resultas de una impulsion ó de golpe; luego respecto de estos no prueba el argumento.

En segundo lugar, aunque es cierto que las velocidades intermedias que el cuerpo ha tenido en distintos tiempos son como los triángulos, no se puede inferir de aquí que las fuerzas que tiene el cuerpo al cabo de un tiempo determinado, sigan la misma razon; porque en el mobil no se halla al cabo de dicho tiempo mas que la velocidad final, habiéndose desvanecido yá las velocidades precedentes; la fuerza es el producto de la velocidad actual multiplicada por la masa. Aun quando la potencia aceleratriz fue-

fuese como los triángulos, su accion solo es igual en cada Fig.
instante al exceso de la velocidad que adquiere el mobil en dicho instante, respecto de la velocidad del instante antecedente, y jamás es igual á la velocidad del instante actual, y del instante pasado juntas. Bien que la potencia sea como el triángulo *Amx*, sin embargo sus acciones en el mobil, juntándolas todas, no son mayores que la linea *xm*. Para manifestarlo con toda evidencia, hemos de con- 129.
siderar que siendo como *nd* la fuerza aceleratriz, y su accion al cabo del tiempo *Ad*, al cabo del tiempecillo *de* la fuerza y su accion absoluta deberá ser como *eo*; pero por tener yá entonces el mobil la velocidad *nd*, respecto de este la potencia solo será $= oe - nd = ot$; y al cabo del tercer tiempecillo *ef*, aunque la accion absoluta de la potencia sea *fp*, como el mobil tiene yá en virtud del impulso antecedente la velocidad $nd + ot = oe$, respecto de este no será mas que $pf - oe = pu$; y así de los demás instantes. Si juntamos ahora todas estas acciones en quanto obran en el mobil, y surten efecto, por ser $ad = NC$, $ot = ON$, $pu = PO$ &c. todas ellas no compondrán mas que la linea *BC* que representa la velocidad final no mas, luego tampoco la fuerza puede ser mayor que todas las fuerzas en quanto obran. Por donde se echa de ver que para la aceleracion se necesita una fuerza mayor que la misma aceleracion, porque de otro modo dicha potencia no obraría en el mobil. Así, para que el mobil se acelere al cabo del tiempo *Ai*, la accion de la fuerza ha de ser

ma-

Fig. mayor que *si*, y ha de ser $= BC$; pero la parte ZC de esta no se necesita como accion, sino porque esta se ha de obrar en un cuerpo que se mueve yá con una velocidad $si = ZC$.

382 VI. Supongamos que entre los dos cuerpos desiguales A y B haya unos quantos elastros ó muelles; en-
130. cójanse y suéltense despues; al tiempo de soltarse comunicarán á los cuerpos una velocidad con la qual se moverán. Dichos cuerpos á cada instante están igualmente comprimidos, y el incremento de la velocidad de A será al incremento de la velocidad de B recíprocamente como B es á A. Despues de soltados completamente los elastros, serán las celeridades totales como sus incrementos; y si llamamos a la velocidad de A, y b la de B, tendremos $A : B :: b : a$, y por consiguiente $a \times A = b \times B$. Como las presiones que obran en dichos dos cuerpos, empiezan y acaban á un mismo tiempo, serán iguales sus tiempos; el centro de gravedad C se mantendrá (163) en reposo, y será (161.2.°) $CA : CB :: a : b$. Dicho punto C es como un obstáculo firme comprimido de ambos lados por los elastros; por lo qual los elastros trasladarán á los cuerpos A y B sus fuerzas que serán en razon de su número, ó como $a : b$. Llamemos finalmente F la fuerza de A, y f la de B, tendremos $F : f :: a : b$; y como hallamos antes $A \times a = B \times b$, será pues $F : f :: a : b :: A \times a \times a : B \times b \times b :: A \times a^2 : B \times b^2$, y quiere decir que las fuerzas serán en razon compuesta de la masa de los cuerpos, y del quadrado de la velocidad.

Resp.

383 *Resp.* Pero ¿ó los elastros están afianzados en *C* Fig. como en un punto inmóbil, ó no lo están? Si no lo están, será falso que las fuerzas que comprimen *B* sean como *BC* ó *b*, y que las que comprimen *A* sean como *AC* ó *a*; y aunque esté en *C* el centro comun de gravedad de los dos cuerpos, no por esto estará en *C* el centro de presion. Porque tanto comprime ú obra el elastro *a* en el cuerpo *B* como en el elastro inmediato *b*, el elastro *b* en su inmediato *c*, esté en el elastro *d*, esté en *e*, esté en *f*, al qual sirve finalmente como de apoyo el cuerpo *A*, y recíprocamente el elastro *f* obra en *e*, este en *d* &c. y á todos sirve como de apoyo el cuerpo *B*; por donde se vé que todos los elastros á medida que se dilatan obran en uno y otro cuerpo igualmente como lo dán á entender las palabras siguientes: *estos cuerpos á cada instante padecen presiones iguales.* Pero si los elastros están realmente asegurados en *C*, por manera que la accion del elastro *d* no pase al elastro *e*, ni la accion de este al otro; será falso que los dos cuerpos *padezcan cada momento presiones iguales.* Porque la accion de los elastros *a*, *b*, *c*, *d* es como 4, y la accion de los elastros *e* y *f* es como 2. Parece evidente que sea que los muelles estén dispuestos en fila conforme representa la figura citada en el argumento, ó que estén dispuestos conforme los representamos aquí, siempre tienen igual accion, con tal que 131. estén encogidos con igual fuerza. Por esta razon es imposible que sea igual su accion, del mismo modo que es imposible ponerlos igualmente encogidos por medio de un peso igual.

Su-

Fig. 132. 384 Supongamos v. g. que por medio de un peso P atado á una cuerda que pasa por una *polea de retorno* se contraygan los quatro elastros a, b, c, d de modo que estén á una misma distancia unos de otros, y que lo mismo suceda por medio de un peso p respecto de los dos elastros e y f. Si la tension fuese igual al peso, y la restitucion á la tension, la accion de los quatro elastros en el cuerpo B al cortar el hilo, será á la accion de los dos en el cuerpo $A :: P : p$. Si suponemos que la restitucion se egecuta en un mismo tiempo, podremos substituir en lugar de la accion de los elastros el impulso de dos cuerpos elásticos P y p movidos con igual velocidad. Hecho esto, como P y p son como los números de muelles que contrahen, y estos recíprocamente como A y B, será tambien P como A y p como B. Pero si B chocára con A con una velocidad $= C$, la velocidad de A despues del choque sería $= \frac{2BC}{A+B}$ (223); y si A fuera á chocar con B con la misma velocidad $= C$, la velocidad de B despues del choque sería $= \frac{2AC}{A+B}$; por consiguiente despues del choque la velocidad de A sería á la de $B :: \frac{2AC}{A+B} : \frac{2BC}{A+B}$, esto es $:: A : B$, es á saber respectivamente como los cuerpos, ó como el número de los muelles. De esto nada se sigue contra nosotros, porque la fuerza del mobil no es como la fuerza motriz, sino como el producto de la masa por la velocidad. La accion no se hace sino para quitar el obstáculo; y como un obstáculo menor se vence con mas facilidad que otro mayor, no todas las fuerzas que concurren

ren para vencer un obstáculo, se gastan en esto. De aquí Fig.
tampoco se sigue que el cuerpo *B* con una velocidad = 2 pueda contraher quatro muelles en el mismo tiempo que el cuerpo *A* pueda encoger dos con una velocidad como 1; porque como en esta contraccion todos los elastros se resisten juntos á un tiempo, y cada uno de ellos está contrahido la misma cantidad, y no succesivamente uno despues de otro, es preciso que una fuerza igual venza en el mismo tiempo dos obstáculos, quando la otra no vence sino uno.

385 VII. De lo dicho (383) parece seguirse, 130.
que no estando lo elastros asegurados en *C*, aunque los cuerpos *A* y *B* padezcan presiones iguales, la restitucion de los elastros comunicaría mayor velocidad á *B* que á *A*; porque, segun hemos dicho, la fuerza igual de los elastros comunicaría velocidades que seguirian la razon recíproca de las masas, y por consiguiente tanto mayor velocidad comunicarian al cuerpo *B* quanto menor fuere respecto de *A*. Pero esta consecuencia es imposible, pues la fuerza con la qual se sueltan los elastros comunica una misma velocidad á un obstáculo mobil, sea que se suelten mas pronto, ó mas despacio; luego la serie de los elastros comunica al cuerpo *B* la misma velocidad que al cuerpo *A*, bien que *B* ceda mas pronta ó facilmente que *A*. Que la fuerza restitutiva de los elastros comunique una misma velocidad á un obstáculo mobil, sea que se restituya mas aprisa, ó mas despacio, se prueba con un esperimento.

Fig. 133. Sea *AB* un péndulo armado de tres pesos móbiles *C*, *D*, *E*, estando dos muelles *H* y *I* unidos con el peso *E*, de manera que quando el péndulo está en la situacion vertical, se puedan contraher por medio del instrumento, retináculo ó aldavilla *F*; si este retináculo se suelta, los elastros apartarán el péndulo de la situacion vertical, y le harán andar un arco como *BG*. Si despues se pasa el peso *E* á *e* con sus muelles, y en el último lugar que él ocupaba, se coloca el peso *C* en *c*, y estando otra vez todo en situacion vertical se vuelven á contraher los muelles, en soltando el retináculo *f* el péndulo andará un arco *bg* igual con el primero *BG*. Pero en el segundo caso los elastros se dilatan mas despacio, como consta por el esperimento, que en el primero; porque el peso en *e* anda un arco mucho menor en un mismo tiempo, que quando está en *E*, pues si se dilataran los muelles tan aprisa como en el primer cono le haría andar al péndulo con que está unido, igual espacio que antes; luego ya que no obstante esto en el mismo tiempo se andan los arcos *BG*, y su igual *bg*, aunque los elastros se restituyan con muy distinta velocidad, dan sin embargo la misma velocidad al péndulo.

386 *Resp.* A dos cosas nos toca satisfacer aquí; es á saber al argumento y al esperimento con que viene corroborado. El argumento quedará respondido con considerar que la fuerza restitutiva de los elastros obrando un mismo tiempo, comunicará una misma velocidad á un obstáculo que opusiere una resistencia igual, ó á un obstáculo que opon-

oponga una resistencia desigual, obrando en tiempos desiguales. Pero la misma fuerza restitutiva de los muelles obrando tiempos iguales no puede comunicar una misma velocidad á un obstáculo que oponga una resistencia desigual. En el caso propuesto (382) los obstáculos *A* y *B* oponen resistencias desiguales, y por consiguiente aunque los muelles obran igualmente por una y otra parte, sin embargo la restitucion es mas pronta respecto de *B*. Fig. 130.

Por lo que mira al esperimento 1.° la restitucion y accion total de los elastros, ni se hace en tiempos iguales, ni es tampoco igual. 2.° la resistencia del péndulo es tambien desigual. Para probarlo, supongamos que se aplique el elastro *BOF* muy contrahido al principio, y que sea tan violenta su restitucion que dilatándose hasta *F*, eche el péndulo hasta *I* en un tiempo *T*, por egemplo. Como el péndulo se puede mover al rededor de *A* como si fuese un apoyo, se puede considerar como una palanca cargada con los tres pesos propuestos; estos pesos se mueven con mas facilidad, si la potencia cuyo oficio hace el elastro está aplicada en *B*, que si está aplicada en *C*, como lo probaremos muy en breve. Por consiguiente, si la accion del elastro que se relaja en *B* despues de haber estado muy contrahido, fuese v. g. como *V*, tal que comunique al péndulo una velocidad con la qual en la mitad del tiempo *T* pueda andar el arco *BG*, en virtud de la misma accion aplicada en *C* del elastro que se restituye de la suma contraccion, en el primer instante el péndulo por oponer mayor resisten- 134.

Fig. cia no adquirirá la misma velocidad sino otra menor. Pero ya que estando el elastro aplicado en *B* la velocidad que el péndulo adquiere por la primera accion del elastro es mayor que quando se aplica el elastro en *C*; estando el péndulo en *M*, la segunda accion del elastro *BNM* respecto del péndulo será menor que la segunda accion del elastro *CKD* quando está el péndulo en *D*, por ser menor la diferencia entre la velocidad del péndulo, y la del elastro quando obra en *B*, que quando obra en *D*, y la accion de una potencia impelente que obra en un cuerpo, es proporcional á la diferencia que hay entre la velocidad del cuerpo, y la de la potencia. Todo esto es tambien cierto respecto de todas las acciones intermedias entre *C* y *E*, y entre *B* y *F*; por lo qual aunque la accion primera en *B* y *C* sea igual, no obstante las intermedias desde *C* á *E* serán mucho mayores que las intermedias desde *B* á *F*. Por consiguiente, no es de estrañar que por la accion total mayor en *CE*, un péndulo que mas se resiste en el tiempo total *T* ande un arco *CH* ó *BI*, en el qual por la accion total menor en *BF* el mismo péndulo que opone menor resistencia, andará el mismo arco *CH* ó *BI*.

135. 387 VIII. Supongamos que sea tal la velocidad del cuerpo *A* que con ella pueda andar en un tiempo dado el espacio $AC = CG$; si dicho cuerpo encuentra en *C* otros dos cuerpos iguales y elásticos *B* y *D*, les comunicará respectivamente movimientos en las direcciones *CE* y *CF*; por manera que estos dos móbiles llegarán á *E* y *F* en el mismo tiem-

tiempo que *A* llegó á *C*, ó llegaría desde *C* á *G*, si no encontrase obstáculo alguno; pero las velocidades con que *B* y *D* andan juntos los espacios *CE* y *CF* son mayores que la velocidad *AC* ó *CG*; luego la fuerza *AC* comunicará una fuerza mayor que ella. Como de esto mismo se sigue que la fuerza no es como la simple velocidad *AC*, es preciso que sea igual al producto de la masa por el quadrado de la velocidad. Fig.

388 *Resp.* Aunque de todo lo dicho hasta aquí se puede inferir la respuesta á este argumento, nos detendremos sin embargo en satisfacerle por menor. Por de contado convienen con nosotros los Partidarios de las fuerzas vivas en que la fuerza que choca oblicuamente produce siempre menor efecto que la que choca directamente. Todos convienen, por egemplo, en que la fuerza con que el mobil *B* cuya velocidad es *AB* dá en el plano *DE*, es á la fuerza con que dá en el mismo plano un mobil igual *C* que 136.
se mueve con la misma velocidad, como *AC* es á *AB*. Si esto es verdad respecto de la fuerza chocante, lo ha de ser tambien respecto de qualquiera fuerza contraria y activa, y aun de qualquiera oposicion; porque es cierto que un cuerpo puesto en la misma direccion de otro que se mueve, se le resiste mas que el que está en una direccion oblicua, y que opone tanto menor resistencia al movimiento del primero quanto mas oblicua es la direccion, que se mide por el ángulo que forma la direccion que sigue despues del choque el cuerpo que antes estaba en reposo, con la

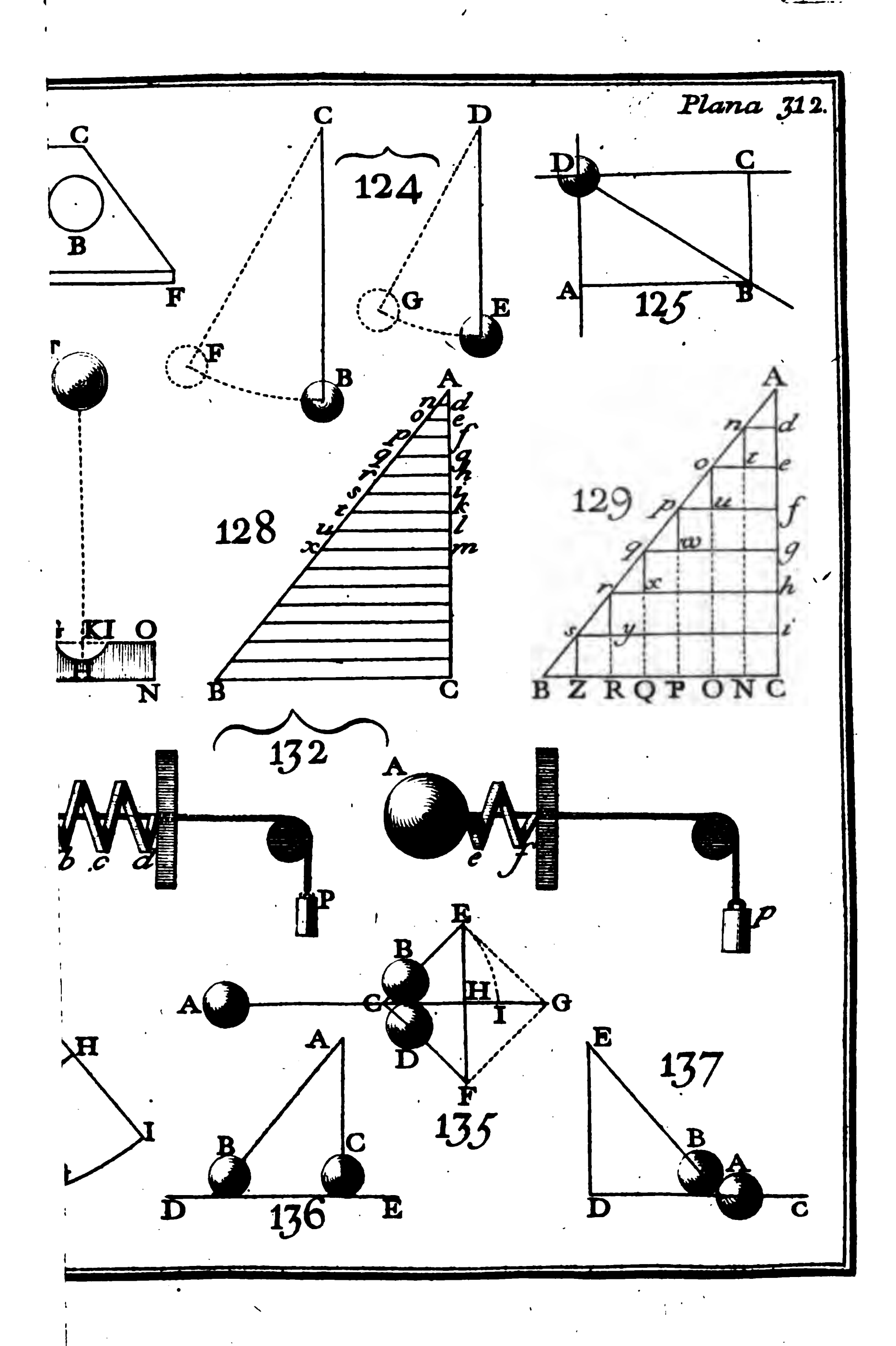
Fig. direccion que tenia el cuerpo chocante. Así el mobil *B*
137. opone mucho menor resistencia al movimiento del cuerpo *A* cuya direccion es *CD*, si *B* despues del choque sigue la direccion *BE*, que si le chocára de modo que despues del choque hubiese de seguir la direccion *AD*. *Así como hay cierto modo de chocar con los planos proporcional á la oblicuidad del mobil chocante, hay tambien en los cuerpos en reposo cierto modo de oposicion ó resistencia que pende de su situacion, cuya resistencia es mayor ó menor, segun fuere la direccion del movimiento que han de adquirir mas ó menos oblicuo, y es proporcional á su situacion.*

389 Todo esto presupuesto es constante que el im-
136. pulso del mobil en el plano *DE* será el mismo en estos tres casos. 1.° Quando el mobil *B* le diese oblicuamente con la velocidad *AB*. 2.° Quando el mismo ú otro igual le diese directamente con la velocidad *AC*. 3.° Quando otro mobil que tenga con el mobil *B* ó *C* la misma razon que *AC* con *AB*, le diese directamente con la velocidad *AB*. Porque si llamamos *M* este tercer mobil será en virtud de esto $M : C :: AC : AB$, y $M \times AB = C \times AC$. Tambien
135. es cierto que el mobil *A* esperimentará la misma resistencia moviéndose con la velocidad *AC* en los tres casos siguientes. 1.° Si chocase con dos móbiles iguales con el mismo *A*, que hayan de seguir despues del choque las dos direcciones oblicuas *CE* y *CF*. 2.° Si chocare con otros dos iguales que hayan de andar la *CH*, ó la mitad de *AC*, ó la mitad de *CG*. 3.° Si chocase con otros dos tales que cada uno de

de ellos tenga con *A* la misma razon que *CE* con *AC* ó *CG*, Fig.
impeliéndoles directamente ácia *CI* igual á *CE* ó *CF*. Pero en el segundo y tercer caso se haría el impulso hasta *H* ó *I*; luego tambien en el primer caso se haría el impulso en el mobil *B* hasta *E*, y en el mobil *D* hasta *F*, porque no es mayor la resistencia sea que ambos se muevan ácia *CE*, sea que el uno se mueva ácia *CE*, y el otro ácia *CF*, una vez que ambos móbiles se consideran como un obstáculo único. Aquí conviene hacerse cargo de que los espacios *CE* y *CF* se han de considerar como un espacio único *CE* ó *CF*, así como ambos cuerpos *B* y *D* se consideran como un obstáculo único; y al reves solo se pueden considerar como distintos los espacios *CE* y *CF*, quando se consideran los dos móbiles como dos obstáculos. A no ser así, tambien se podría decir que si el globo *A* anda un espacio qualquiera *BC*, andaría dos espacios distintos, pues el emisferio in- 138.
ferior se mueve en la direccion de la recta *BC*, y el emisferio superior en la direccion de la recta *AD*. Pero de lo dicho (205) consta que quando los móbiles *B* y *D* 135.
han llegado á *E* y *F*, chocan con los planos *EG* y *FG* del mismo modo que daría en él el mobil *A* con la velocidad *AC* ó *CG*, si llegase desde *C* á *G*. Luego &c.

390 IX. Imaginemos finalmente que el cuerpo *C* vá 139.
á dar oblicuamente en el elastro *L* con la velocidad $CL = 2$, siendo de 30° el ángulo de inclinacion *CLP*, cuyo seno *CP* es (I. 642) la mitad del radio *CL*. Suponemos que es tal la resistencia del elastro que para contraherle no se necesita-

Fig. ría mas que un grado de velocidad en el cuerpo, si le hiriera perpendicularmente. Veamos qué ha de suceder despues del choque oblicuo del cuerpo *C* con el elastro *L*. Ya que el movimiento en la direccion *CL* se compone de los dos movimientos *CP* y *PL*, y *CP* que es la direccion en virtud de la qual el cuerpo dá directamente en el muelle *L*, espresa la mitad de la velocidad del cuerpo ácia *CL*; se consumirá el movimiento *CP*, despues de contrahido el elastro, quedándole al cuerpo no mas que la velocidad y direccion *PL*. Porque será lo propio que si el cuerpo *C* hiriera directamente el obstáculo con la velocidad *CP*, pues el elastro puede destruir dicha velocidad, segun hemos supuesto. Por consiguiente, si prolongamos la *PL* hasta *M*, de modo que $LM = PL = \sqrt{3}$, pues se supone $CL = 2$, é imaginamos en *M* otro elastro semejante al primero que forme con *LM* el ángulo *LMQ*, cuyo seno $LQ = CP = 1$; es evidente por la misma razon, que el cuerpo *C* despues de contrahido el elastro *L*, contraherá el elastro *M* despues de perdido el movimiento en la direccion *LQ*, quedándose con el movimiento *QM*. Si se prolonga *QM* hasta *N* de modo que sea $MN = QM = \sqrt{2}$, y se coloca en *N* otro elastro semejante que forme con *MN* el ángulo *MNR* semirecto, en virtud de lo qual sea otra vez $MR = CP = 1$; es evidente tambien que el movimiento *MR* se gastará todo en contraher el elastro *N*, prosiguiendo el cuerpo moviéndose en la direccion, y con la velocidad $RN = 1$. Finalmente si con esta velocidad residua el cuerpo diere perpendicularmente en el elastro


Plana 312.
C
B
F
C
B
F
124
D
G
E
D
C
A
B
125
A
n d
o e
p f
q g
r h
s i
t k
u l
x m
128
B
C
A
n d
o t e
129
p u f
q w g
r x h
s y i
B Z R Q P O N C
K I O
N
132
b c d
A
e f
P
P
E
B
A
C
H
I
G
D
F
135
H
I
A
B
C
D
136
E
E
137
B
A
D
C

tro *O*, gastará en doblarle toda la fuerza que le quedáre, y Fig.
se quedará en reposo. En virtud de esto parece evidente que la fuerza del cuerpo *C* habrá sido tal que con ella sola habrá podido contraher quatro muelles tales que para contraher cada uno de ellos se requiere la mitad de la velocidad de un cuerpo igual á *C*, y por consiguiente yá que el efecto de este es quatro veces mayor que el efecto del otro, es tambien evidente que la fuerza de un cuerpo cuya velocidad es de dos grados es quádrupla de la fuerza del mismo cuerpo, ó de otro igual que tuviese una velocidad de un grado no mas.

391 *Resp.* A este argumento se satisface facilmente. Porque la fuerza *PL* con la qual el cuerpo dá en el elastro *L*, no es la residua de *CL* despues de destruidá *CP*, sino una fuerza compuesta de *CL*, y de la reaccion del elastro *L*, que es igual á *CP*. Lo mismo se ha de decir de los demás.

Del principio de la Conservacion de las Fuerzas vivas.

392 Entre muchas consecuencias que se infieren de la igualdad entre el movimiento perdido, y el movimiento ganado (212) hay una que, bien que no sea absolutamente general, abraza una infinidad de casos, y ha servido con la mayor felicidad para resolver varias cuestiones de Dinámica. Esta consecuencia es la de la *Conservacion de la Fuerzas vivas*, y una ley que se verifica en algunas circunstancias del movimiento de los cuerpos.

Quan-

Fig. Quando muchos cuerpos obran unos en otros, sea que tiren unos de otros por medio de hilos ó varas inflexibles, sea que se impelan unos á otros, con tal que en este último caso sean perfectamente elásticos, no esperimentando el systema la accion de ninguna causa aceleratriz; la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades es una cantidad siempre constante todo el tiempo que dura el movimiento. Pero si el systema esperimenta la accion de fuerzas aceleratrices, la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades á cada instante es igual á la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades iniciales, mas á la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades que dichas masas hubieran adquirido desde el principio del movimiento, si cada una de ellas se hubiere movido libremente en la curva que ha trazado en virtud de su movimiento forzado.

393 Hemos de demostrar esta ley, y nos ceñíremos á probar que siempre se verifica en el choque directo de los cuerpos elásticos. Hemos, pues, de demostrar que *sea que dos cuerpos elásticos* A *y* B *caminen ambos ácia una misma direccion antes del choque, sea que vaya el uno ácia el otro; la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades despues del choque siempre será igual á la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades antes del choque.*

Porque 1.° Quando ambos cuerpos caminan antes del cho-

choque ácia una misma parte, la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades despues del choque es (224) $A\left[\frac{AV - BV + 2Bv}{A+B}\right]^2 + B\left[\frac{2AV - Av + Bv}{A+B}\right]^2$, cuya cantidad se transforma despues de hechas todas las reducciones en $AVV + Bvv$; que es la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades antes del choque. 2.° Si los dos cuerpos ván al encuentro uno de otro, la suma de los productos de las masas por los quadrados de las velocidades despues del choque será (226) $A\left[\frac{AV - BV - 2Bv}{A+B}\right]^2 + B\left[\frac{2AV + Av - Bv}{A+B}\right]$, cuya espresion se reduce igualmente á $AVV + Bvv$. Fig.

Del Rozamiento en general.

394 La superficie de los cuerpos, aun de los mas bruñidos, está empedrada, como suelen decir, de una infinidad de asperidades ó eminencias, y acribillada de muchísimos poros ó huecos. Quando un cuerpo descansa sobre otro, las partes salientes del uno se introducen en los poros ó huecos del otro; y para sacar las unas de dentro de las otras se necesita indispensablemente alguna fuerza. La resistencia que resulta de esta propiedad de los cuerpos se llama la *Fuerza del Rozamiento.*

395 Hay dos especies principales de rozamiento; es á saber el rozamiento de los cuerpos que no hacen mas que resbalarse unos por otros, y el de los cuerpos que ruedan. El rozamiento de la primera especie es mucho mas fuerte que el de la segunda, porque en el primer caso no es po-

Fig. sible hacer correr el cuerpo, á no ser que se le levante un poco verticalmente para sacar las eminencias de dentro de las cavidades, ó sin quebrantar las puntas, en virtud de un movimiento que las sea perpendicular; pero en el segundo caso el movimiento de rotacion coadyuva por sí á desprender las eminencias de las concavidades, y hace correr ó resbalar el cuerpo como por un plano inclinado. La rueda de un carro ó coche que anda esperimenta un rozamiento de la segunda especie. Por lo mismo camína con mas velocidad que si no hiciera mas que resbalar sin dar vueltas. Por este motivo quando algun carruage ha de bajar por una cuesta algo empinada, se sujetan sus ruedas para que no rueden, con lo que crece el rozamiento y se contrarresta el movimiento que la pesantez comunica al carruage á lo largo del plano inclinado.

396 En algunos casos se juntan las dos especies de rozamiento, y resulta un rozamiento mixto; esto sucede quando hay á un tiempo *resbalamiento* y rotacion en los cuerpos que se rozan uno con otro. Tal es el rozamiento del ege de una rueda con el cubo. Supongamos, por egem-
140. plo, que una rueda *axy* ruede por el terreno orizontal *AB*, yendo desde *A* ácia *B*; y supongamos que quando ha llegado á *B* haya dado una vuelta, por manera, que habiéndose aplicado todos los puntos de su circunferencia sobre la recta *AB*, las dos lineas sean iguales una con otra. Es evidente que en el terreno no habrá mas rozamiento que de la segunda especie. Es tambien evidente que todos los puutos *c*, *e* del ege

ege *efi* que no tiene mas que un movimiento progresivo, Fig.
y ninguno de rotacion, andan rectas *cq*, *ep* iguales y paralelas á *AB* con velocidades iguales á la velocidad de rotacion del punto *a* de la circunferencia *axy*. Y como el punto *m* del cubo *mgb* rueda con una velocidad menor que la del punto *a*, en razon de *cm* á *ca*, es patente que el punto *e* del ege resbala continuamente por el punto correspondiente del cubo. De donde resulta que en dicho lugar hay dos movimientos, el uno de rotacion, y el otro de resbalamiento, ó solo un movimiento compuesto de los dos primeros; hay, pues, tambien dos rozamientos, el uno de rotacion, y el otro de resbalamiento, ó solo un rozamiento compuesto de los otros dos.

397 No deja de haber hombres de bastante conocimiento en punto de máquinas, que consideran como nulo el rozamiento de la segunda especie, y creen que una máquina cuyas partes no resbalasen de ningun modo unas por otras, se debería considerar como libre de rozamiento. Pero esto es un error; porque es evidente que en el rozamiento de la segunda especie, las puntas no pueden desenredarse de entre las cavidades, sin que el cuerpo trepe á cada instante por un plano inclinado, y sin que por lo mismo se levante un trecho igual á la altura de dicho plano inclinado, sea por otra parte tan pequeña como se quisiese respecto de lo que coge de largo la cuestecilla. De donde se sigue que esta especie de rozamiento ha de consumir por precision parte de la fuerza motriz. Esto manifiesta que si 141.

Fig. 141. un círculo *axyz* puesto encima de un plano inclinado y entregado al impulso de la pesantez, baja rodando, pierde parte de la velocidad que la pesantez intenta por sí comunicarle. Porque representemos su gravedad por la vertical *cp*, y resolvamos esta fuerza en otras dos *cr*, *cq* la una perpendicular, y la otra paralela á la longitud del plano inclinado *HGI*. Como la primera se consume, el cuerpo bajará por solo el impulso de la segunda; y como la direccion de esta fuerza divide el cuerpo en dos partes *xaz*, *xyz*, de todo punto iguales; es evidente que el espresado círculo, al tiempo de bajar, trazaría simplemente la recta *bg* igual y paralela á *HG*, y no rodaría, si no esperimentára ningun rozamiento en *a*. Pero en el estado natural de las cosas, por mas tersas y bruñidas que estén las dos superficies, hay en *a* un continuo *engargante* de las puntas con las cavidades, de donde se origina un rozamiento que hemos de considerar como una fuerza dirigida en la direccion de *GH*, y que siendo por consiguiente contraria á la accion de la fuerza *cq*, destruye indispensablemente parte de ella.

398 Bien que no sea una misma la cantidad de las dos especies de rozamiento, es facil columbrar que han de seguir con corta diferencia unas mismas leyes. Porque en ambos casos se puede comparar la resistencia con la de un cuerpo que es preciso levantar un poco, y que en el primer caso es mayor que en el segundo. Es, pues, constante, y nos lo enseña la esperiencia, que se disminuirá uno y otro rozamiento, sea bruñiendo las superficies

cies de los cuerpos que se rozan, sea untándolas con alguna materia gorda y pegajosa que tape sus cavidades. También manifiesta la esperiencia, que siendo igual todo lo demás, el rozamiento entre materias de una misma especie es mayor que entre materias de diferentes especies; quiero decir, por egemplo, que el rozamiento del cobre con el cobre es mayor que el del cobre con el hierro. Esto se esplica con decir que entre materias de una misma especie, estando las superficies igualmente llenas de puntas y cavidades, el contacto es mas inmediato, y las puntas se introducen mas en las cavidades, que quando las materias son de distinta especie. Fig.

399 Hay otra circunstancia de un género particular que ocasiona diferencias notables en el rozamiento, cuya circunstancia consiste en el tiempo que los cuerpos están aplicados unos sobre otros. Se ha observado que dejando mucho tiempo dos superficies una encima de otra, su rozamiento llega á ser mayor que en los primeros instantes; sea que una presion mas continuada introduzca las puntas mas adentro de las cavidades, sea porque en general alguna causa física pega, digamoslo así, mas estrechamente una con otra las dos superficies. Pero nada se sabe de cierto y preciso acerca de la ley que sigue este aumento del rozamiento, ni acerca del tiempo que dura.

400 Han disputado mucho tiempo los Físicos, y la cuestion no está todavia enteramente decidida, sobre si siendo todo lo demás igual, la mayor ó menor estension de las

su-

Fig. superficies por donde dos cuerpos se tocan, contribuye para el aumento del rozamiento. Unos pretenden que *el rozamiento es simplemente proporcional á la presion*, esto es, á la fuerza que aplica las dos superficies una encima de otra, y no pende de su situacion, alegando algunos esperimentos á favor de su opinion. Otros piensan lo contrario, y afirman que *no siguen los rozamientos la razon de las presiones*; tampoco les faltan á estos esperimentos con que autorizar su dictamen, bien que son en corto número, y se han hecho sin atender á algunas circunstancias necesarias, por lo qual no bastan á terminar la controversia. Nosotros nos inclinamos á creer lo propio que los primeros, pero con algunas restricciones que declararemos, despues de propuestas las razones en que se fundan.

401 Las puntas de que están armados los cuerpos, se pueden considerar, segun dichos Autores, ó como pequeños cuerpos duros incapaces de doblarse, ó como pequeños muelles que se contrahen quando algun peso los comprime. Pero 1.° si miramos las puntas como cuerpos duros, se echa de ver que para separar las dos superficies, se ha de levantar la una de ellas, y que solo estorva levantarla el peso, y no la estension de la superficie. Verdad es que siendo grande la superficie habrá mas puntas introducidas, que quando fuere menor; pero se introducirán menos profundamente que en esta, cabalmente en la misma razon de la estension de las superficies; porque la presion que causa el

el engargante siendo siempre una misma, el engargante total ha de ser tambien siempre el mismo. 2.° Si consideramos las puntas como muelles pequeños que se han de contraher, tambien será el rozamiento proporcional á la presion. Porque quanto mayor fuere la presion, tanto mas contraherá los muelles, y tanto mas por lo mismo estos se le resistirán. Quando se aumenta la superficie permaneciendo siempre una misma la presion, los muelles están tanto menos contrahidos quanto mayor es su número; y la fuerza que en ambos casos consumen los resortes, ha de ser la misma, y siempre proporcional á la presion. Fig.

402 Confesamos que son muy plausibles estas razones, pero no son demonstrativas. Solo prueban quando mas, hablando con todo rigor, respecto de materias cuyas partes están intimamente unidas unas con otras, sean dichas materias duras ó elásticas. Pero si las puntas de las superficies se quiebran al rozarse unas con otras, el número de dichas puntas que es proporcional á las superficies, aumentará la resistencia del rozamiento; y la esperiencia concuerda con esta ilacion. Hemos de prevenir que aun entonces mismo la mayor ó menor presion es la causa que quebranta mas ó menos las puntas de las superficies, y que por consiguiente coadyuva al rozamiento con mas eficacia que la estension de las superficies. Lo que se debe inferir de todo esto es que la presion es el principal, bien que no el único, elemento del rozamiento. Hay todavia un caso al qual no se aplica la hypótesis de ser el rozamiento pro-

Fig. porcional á la presion; es el de un cuerpo puntiagudo ó cortante que se mueve por un plano; porque entonces la punta ó corte ara el plano, y esperimenta de su parte una resistencia que no es de igual naturaleza que el rozamiento ordinario.

403 Parece á primera vista que la velocidad debería tambien aumentar el rozamiento; porque quanto mas veloz se mueve un cuerpo, tantó mayor es el número de las puntas que se han de desembarazar, ó de los muelles que es preciso contraher. Se han hecho esperimentos que al parecer prueban que el rozamiento de los cuerpos en movimiento es con efecto proporcional á su velocidad. Sin embargo puede suceder que la velocidad no aumente sensiblemente el rozamiento; porque si por un lado al paso que crece la velocidad hay mas puntas que desembarazar, ó mas muelles que contraher, puede suceder por otro lado que dicha mayor velocidad no le dé á la presion el tiempo de introducir las puntas en las cavidades, tan adentro como lo consentiría una velocidad menor. Y parece que una diminucion de engargante ha de causar una diminucion de rozamiento. Ni la teórica, ni la esperiencia se han esplicado todavia con bastante claridad sobre estos puntos.

404 Quando apreciáremos mas adelante el rozamiento en las máquinas que están para moverse, supondremos que las superficies que se rozan son bastante duras y grandes para poder considerar el rozamiento como sensiblemente proporcional á la presion. Esta hypótesis se puede admi-

mitir en la mayor parte de las máquinas, y particularmente en las máquinas en grande, en las quales las piezas que padecen el rozamiento son por lo regular de metal, y se pone cuidado en que no rocen por puntas, ni por cortes. Fig.

405 Pero aunque supongamos el rozamiento proporcional á la presion, no pretendemos que sea siempre una misma la razon entre estas dos fuerzas. Varía segun son mas ó menos bruñidas las superficies. En los cuerpos que se resbalan sin rodar, el rozamiento puede ser el tercio, el quarto ú otra parte qualquiera de la presion; en esto no hay nada fijo, y pende del grado de lisura que tienen las superficies. En los cuerpos que ruedan, el rozamiento es mucho menor conforme llevamos dicho, puede ser la sexta, octava, &c. parte de la presion, segun fueren las superficies mas ó menos duras y lisas. Por consiguiente esta espresion *el rozamiento es proporcional á la presion*, significará que la resistencia del rozamiento es igual á cierta parte de la fuerza que aprieta una contra otra las dos superficies que se rozan, y solo pende de dicha fuerza combinada con el grado de lisura de las superficies, y en ninguna manera de su estension.

406 Todo esto presupuesto, veamos cómo despues de determinada la cantidad del rozamiento respecto de una especie de materia conocida, se puede inferir en general el efecto que causará en una máquina ó en un movimiento propuesto.

Sirva de primer egemplo el peso *P* puesto sobre el 142.
plano orizontal *AB*, de cuyo peso tira el peso *Q* parale-

Fig. lamente á *AB*. Supongámos que el cuerpo *Q* no tenga cabalmente mas que el peso necesario para poner el cuerpo *P* en términos de si se escurre ó no se escurre. Averiguemos qué razon ha de haber entre el peso *Q*; y la fuerza del rozamiento.

Desde el centro de gravedad *G* del cuerpo *P* tirarémos la *GH* perpendicular al plano *AB*. La gravedad solicita el cuerpo *P* en la direccion *GH*, y el cuerpo *Q* le solicita en la direccion *KD* que encuentra *GH* en *K*. Del concurso de estas dos fuerzas resulta otra fuerza en la direccion de una linea qualquiera *KI* que encuentra en *I* el plano orizontal, y esta fuerza no puede menos de consumirse una vez que, según suponemos, el cuerpo *P* solo está si se mueve ó no se mueve. Concibamos la fuerza dirigida por *KI* ó *KIZ* aplicada en el punto *I*, y resuelta en dos, la una perpendicular al plano, la otra en la direccion del plano; qualquiera se hará cargo de que estas fuerzas serán de todo punto las mismas que las que tenian las direcciones *KH* y *KD*. A mas de esto, la primera de dichas fuerzas se consumirá evidentemente, por lo menos si encuentra el plano *AB* en algun punto *I* que le sea comun con la superficie del cuerpo. Por lo que mira á la segunda, como está en la misma direccion del rozamiento, no se consumirá sino en quanto fuese cabalmente igual con la fuerza del rozamiento; luego es preciso que sea cabalmente igual á la fuerza del rozamiento.

Esto manifiesta lo que se ha de practicar para determi-

minar el valor del rozamiento; se tomarán succesivamente en lugar de *Q* diferentes pesos hasta dár con uno que ponga al cuerpo *P* en términos de si se mueve ó no se mueve. Pero para no incluir en la valuacion del rozamiento del cuerpo *P* efectos distintos del que se busca, será preciso poner cuidado 1.° en que la polea *D* sea muy mobil, y que el cordon *KDQ* sea lo mas flexible que se pueda. 2.° en atar el cordon *CD* en un punto *C* el mas inmediato que sè pueda á la superficie *AB*; esta prevencion es indispensable, porque, siendo igual todo lo demás, el punto *I* donde la fuerza cuya direccion es *KI* encuentra la superficie *AB*, se acercará tanto mas al estremo *S* de la base del cuerpo, y tambien á caer fuera de dicha base, quanto mas alto estuviere el punto *C* respecto del plano. Como en el caso de caer el punto *I* fuera de la base, la fuerza perpendicular al plano no se consumiría toda entera, resultaría (177) un movimiento de rotacion en el cuerpo. Y el rozamiento que entonces se determinase, podría discrepar mucho del que se busca, esto es, de aquel que estorva el movimiento para resbalar, pues dando entonces el cuerpo vueltas sobre una punta, esperimentaría un rozamiento mucho mayor. Pero tomando el punto *C* muy cerca del plano *AB*, siempre estará el punto *I* muy cerca del punto *H*, y será tanto menos de temer que toda la presion se junte en solo el punto *S*. Fig.

407 Si el peso *Q* fuese mayor que la fuerza del rozamiento, el peso *P* se moverá. Si los cuerpos que se mue-

Fig. ven esperimentasen el rozamiento del mismo modo que los que están para moverse, sería facil determinar el movimiento de P y Q al cabo de un tiempo qualquiera t. Con efecto, si el rozamiento tuviera con la presion, que en este caso es el peso del cuerpo P, una razon constante mientras dura el movimiento, como pdt es la velocidad que dá la pesantez en un instante, $Ppdt$ sería la presion, y $\frac{n}{m}Ppdt$ sería la fuerza del rozamiento, en el supuesto de ser la presion al rozamiento como $m : n$. Por consiguiente como la pesantez daría á Q la cantidad de movimiento $Qpdt$, no la quedaría para obrar eficazmente en P mas que la cantidad $QPdt - \frac{n}{m}Ppdt$, la qual distribuida conforme se practicó (233), daría $\frac{Qpdt - \frac{n}{m}Ppdt}{P + Q}$, que sería la espresion de la velocidad de aceleracion del cuerpo Q, que por consiguiente se movería con un movimiento uniformemente acelerado, una vez que por el supuesto $\frac{Qp - \frac{n}{m}Pp}{P + Q}$ es una cantidad constante. Luego la velocidad al cabo de un tiempo qualquiera t sería $\frac{Qp - \frac{n}{m}Pp}{P + Q}t$; de donde se podría inferir facilmente el espacio andado. Pero las señas son de que el rozamiento no es constante quando los cuerpos están en movimiento, y que pende mucho de la velocidad; ni tampoco ha dicho la esperiencia hasta ahora qual es la ley del rozamiento respecto de la velocidad.

Con-

408 Consideremos ahora un peso puesto encima de un plano inclinado, y detenido por solo el efecto del rozamiento. Como la accion de la pesantez dirigida por la vertical *GZ* que pasa por el centro de gravedad *G* del cuerpo *P*, encuentra en *I* uno de los puntos de la superficie *AB* del plano, se ha de resolver allí en dos esfuerzos, el uno perpendicular al plano, el otro en la direccion del plano. El primero se consumirá si el punto *I* no estuviere fuera de la base *RS*; y para que el segundo se consuma es preciso que sea igual á la fuerza del rozamiento. Pero si formamos el paralelogramo *ILZH*, echaremos de ver que si *IZ* representa el peso de un cuerpo, *IH* será la presion, é *IL* la fuerza del rozamiento; luego yá que los triángulos semejantes *ILZ*, *ABC* dán *IL* : *LZ* ó *IH* :: *BC* : *AC*, se echa de ver que la fuerza del rozamiento ha de tener con la presion la misma razon que la altura del plano con su base. Se echa de ver igualmente que *IL* : *IZ* :: *BC* : *AB*, esto es, que la fuerza del rozamiento es al peso mismo del cuerpo como la altura del plano es á su longitud. Fig. 143.

Estos principios tambien pueden servir para determinar el rozamiento sobre diferentes superficies. Se alzará succesivamente el plano *AB* hasta que el cuerpo *P* esté para resbalar; midiendo entonces la altura y la base, se sacará la razon entre la fuerza del rozamiento y la presion. Pero en esta prueba será menester valerse en lugar de *P* de cuerpos cuyo centro de gravedad diste muy poco del plano; á fin de que el punto *I* ó la vertical *GZ* encuentre el plano, no

Fig. se salga de la base *RS*, y ni siquiera pase por el punto *R*; porque entonces el rozamiento que se habría de superar, sería el de un cuerpo que roza con una punta, y sería mucho mayor que el rozamiento de que estamos tratando.

409 Manifiestan estos dos egemplos que, llevando en cuenta el rozamiento, para que un cuerpo se mantenga en equilibrio sobre una superficie propuesta, y de modo que esté en el estado mas próximo al movimiento, es preciso que la fuerza única que obra en él, quando no hay mas que
143. una, ó la derivada de todas las fuerzas que obran en él, tenga respecto de la superficie por donde ha de resbalar, una inclinacion *GIS* ó *ZIL* tal que tengamos *IL* : *LZ* como la fuerza del rozamiento es á la presion; pero *IL* : *LZ* :: 1 : tang *LIZ*, siendo 1 el radio de las tablas; luego la inclinacion *LIZ* ha de ser tal que el radio sea á la tangente de dicha inclinacion, como la fuerza del rozamiento es á la presion; luego una vez determinada la razon entre la fuerza del rozamiento y la presion, siempre será facil determinar qué inclinacion ha de tener la derivada de todas las fuerzas que obran en el cuerpo, para que dicho cuerpo esté en el estado de equilibrio el mas próximo al movimiento. En adelante llamaremos *Ángulo del Rozamiento* el ángulo *LIZ*. Luego este ángulo varía segun varían las materias, segun se las ha preparado ó bruñido &c. mas ó menos. Si el rozamiento es el tercio de la presion, segun se verifica en bastantes materias alisadas con bastante cuidado, la tangente *LIZ* será tripla del radio; y como el ángulo cuya tangente es

es tripla del radio, es de $71^\circ 34'$; será este por consiguiente el ángulo del rozamiento en las espresadas materias. Fig.

410 Detengámonos en considerar ahora algunos de los movimientos que se originan del rozamiento, y que no sucederian si no fuera por esta resistencia.

Hemos declarado muchas veces (177), y en otras partes lo que le sucedería á un cuerpo libre *BOQ*, si se le diera un impulso ácia una direccion que no pasase por su centro de gravedad. Pero si al mismo cuerpo se le diera esteriormente un golpe en una direccion qualquiera *AB*, no recibiría todo el impulso; se debería resolver dicho impulso en otros dos, el uno en la direccion de la tangente de la superficie, el otro en la direccion *BC* perpendicular á la misma superficie. Si no hubiera rozamiento, la fuerza impulsiva no causaría efecto ninguno en la direccion de la tangente, no haría mas que rasar con la superficie; no se le comunicaría, pues, al cuerpo mas que la fuerza en la direccion *BC*, y esta no le haría rodar sino en el caso de no pasar la direccion de dicha fuerza por el centro de gravedad *G*. De donde se sigue, que si el cuerpo fuese esférico, y de una materia uniforme, jamás rodaría en virtud de un impulso esterior, si no fuera por el rozamiento; porque la perpendicular á su superficie siempre pasa por el centro de figura que es el mismo que el centro de gravedad. No sucede lo mismo en el caso del rozamiento; la fuerza en la direccion de la tangente se comunica por medio de las as- 144.

pe-

Fig. peridades de la superficie, en tanto mayor cantidad, quanto la superficie es mas capaz de rozamiento; por manera que además de los movimientos que resultarán de la fuerza en la direccion *BC*, el cuerpo rodará, y el centro *G* abanzará paralelamente á la tangente, del mismo modo que si una potencia igual á la fuerza del rozamiento tirára del punto *B* en la misma direccion por medio de un hilo atado á dicho punto.

145. 411 Supongámos que el cuerpo duro y esférico *ABC* cayga libremente encima del plano orizontal *HR*; y que alguna causa, sea la que fuese, le haya comunicado un movimiento de rotacion al rededor de su centro de gravedad. Si no fuera por el rozamiento, el cuerpo despues de haber encontrado el plano, no guardaría mas movimiento que el de rotacion, y su centro de gravedad se estaría inmobil. Pero si hay rozamiento, así que el cuerpo hubiere dado en el plano, rodará desde *I* ácia *R*, ó desde *I* ácia *H*, segun su movimiento de rotacion fuere en la direccion *CAB* ó *BAC*; porque como la resistencia del rozamiento que obra en la direccion del plano equivale á una fuerza que obrase en el cuerpo en una direccion contraria á su movimiento, debe, una vez que no pasa por el centro de gravedad de dicho cuerpo, darle (177) un movimiento paralelo al plano, y un movimiento de rotacion, ambos en una direccion contraria á su movimiento actual de rotacion; pero de dichos dos movimientos el uno destruye continuamente el movimiento primitivo de rotacion; y al contrario el movimiento del centro se acelerará, pero hasta cierto

to punto no mas, pasado el qual menguará hasta cesar, y con él el movimiento de rotacion. Fig.

412 En virtud de esto se puede esplicar facilmente 146.
1.° por qué dándole al cuerpo esférico *ABC* un impulso en la direccion *DB*, abanza desde luego desde *I* ácia *E*, vuelve despues desde *E* ácia *I*, y pasa aun mas allá de *I* ácia *F*. La impulsion en la direccion *DB*, le obliga á rodar, por razon del rozamiento en *B*, ácia *ABC*, y abanzar en la direccion *IE*; pero como el rozamiento por el plano es entonces un rozamiento de la primera especie, el movimiento del centro de gravedad para muy presto, y el movimiento de rotacion le dá otro ácia una direccion contraria, del mismo modo que en el caso antecedente.

2.° Por qué una bala de cañon que al caer parece que ha perdido toda su fuerza, vuelve no obstante muchas veces á moverse con violencia. Quando la arroja la fuerza de la pólvora, adquiere rozando por la parte inferior del hueco del cañon un movimiento de rotacion que mengua poco en el ayre: quando llega á dár en el suelo, como su movimiento de rotacion por la parte de dicha superficie tiene una direccion contraria á su movimiento de traslacion, ha de resultar (411) de aquí una aceleracion en el movimiento del centro; quiero decir, en el movimiento de traslacion. Porque aun quando el centro estuviera inmobil un instante, se echa de ver en vista de lo dicho hasta aquí, que el movimiento de rotacion puede ser bastante en muchas ocasiones para sacar la bala del hoyo en que

se

Fig. se hubiese metido, arañando y arando la tierra.

413 Pero si el rozamiento perjudica en muchos casos, hay muchos mas en que es provechoso. Si no fuera por el rozamiento, no podríamos caminar por pendiente ninguno por mas suave que fuese. Un hombre ó un animal que corriese velozmente, y diera vueltas al mismo tiempo
147. al rededor de un punto fijo *C*, no podría menos de caerse qualquiera situacion que tomase; siendo así que por medio del rozamiento puede inclinarse de lado ácia el punto *C* al rededor del qual está dando vueltas, y conseguir con esto que su pesantez dirigida por la vertical *GK* que pasa por su centro de gravedad *G*, y la fuerza centrífuga *GF* que adquiere dando vueltas, que se dirige desde *C* ácia *F*, concurran para producir una fuerza única dirigida por una linea *GI* que pasa por un punto *I* entre las piernas del animal; entonces esta fuerza, bien que oblicua, será igualmente destruida por el rozamiento, con tal que sea la inclinacion qual la requiere esta resistencia.

Al mismo rozamiento se debe el recurso de poder disminuir el daño que ocasiona, porque solo con el rozamiento se logra desgastar y bruñir las superficies de los cuerpos. Al rozamiento se debe la facilidad con que conseguimos hacer que las partes de algunas máquinas sean yá fijas, yá móbiles. Del rozamiento proviene el efecto que causan las tigeras, y otros instrumentos cortantes de la misma especie, como son las tenazas, pinzas, limas &c. Si las hojas de las tigeras, por egemplo, no fuesen unas sierras ar-

ma-

madas de dientes muy pequeños que se introducen en las pequeñas cavidades de los cuerpos que queremos cortar, estos cuerpos se escurririan por entre los dos filos. Fig.

Tambien coadyuva el rozamiento en algunas ocasiones para mover los cuerpos ácia ciertas direcciones; por esta razon quando queremos levantar por medio de la barra *AB* el cuerpo *P*, lo conseguimos fácilmente haciendo que descanse sobre su canto *CD*; el rozamiento que entonces es muchísimo, hace que *CD* se esté inmobil, y le detiene para que no se escurra. La misma causa sujeta el estremo *A* de la barra. Si en este caso queremos averiguar la razon entre el peso *P* y la potencia *Q*, imaginaremos la pesantez de *P*, cuya direccion es la vertical *GK* que pasa por su centro de gravedad *G*, resuelta en dos fuerzas paralelas, la una que pasa por el punto *I* donde el cuerpo descansa en la tierra, la otra que pasa por un punto de *CD*, que está en el plano de las dos paralelas *GK*, *IM*; entonces la fuerza que de esto resulta en *I*, será á *P* :: *EK* : *EM* (85); y si desde *A* tiramos á *IM* la perpendicular *AL*, la fuerza *Q* será á la fuerza *I* :: *AL* : *AB*; de donde inferiremos que *Q*: *P* :: *AL* × *EK* : *AB* × *EM*. Si miramos la fuerza en la direccion *IM* como comunicada enteramente á la barra, lo hacemos solo por causa del rozamiento que hay en *I*. Si no fuera por este rozamiento, la barra no recibiría mas parte de dicha fuerza que la que obrase en la direccion de la perpendicular *AB*. 148.

414 Al rozamiento se ha de atribuir, y al rozamien-

Fig. miento solo, aquel movimiento estraño en virtud del qual
149. algunos cuerpos que ruedan, quebrantan las leyes de la gravedad, y adquieren un movimiento ácia arriba, siendo así que la pesantez los impele ácia abajo. Hablamos aqui del movimiento del trompo. Es notorio que quando un cuerpo qual le representamos, esto es, simétrico respecto del uno *ND* de sus eges, ha adquirido un movimiento de rotacion al rededor de dicho ege, y anda por su punta *N* un plano orizontal *XZ*; es notorio, digo, que quanto mas pequeña es la punta, y quanto mas tambien la materia del cuerpo, apartándose de *N*, se aparta del ege *ND*, tanto mas pronto el cuerpo se levanta, y procura con este esfuerzo poner en una direccion vertical el ege *ND*. Vamos á probar que no sucedería este fenómeno si no hubiera rozamiento, declarando al mismo tiempo de qué especie es el rozamiento que le ocasiona.

Para darnos mejor á entender, no consideremos en el
150. trompo mas que un ege *ND*; y supongamos que la punta *N*, y el plano orizontal *HZ* son perfectamente bruñidos. Como no hay mas causa que se oponga al movimiento del centro de gravedad *G* que el plano *HZ*, la resistencia que dicho centro padece no puede tener otra direccion que la linea *NK* perpendicular á *HZ*, sea por lo demás el que fuere el movimiento de rotacion al rededor de *ND*. Pero es evidente que esta resistencia se esperimenta únicamente porque la pesantez empuja el cuerpo ácia el plano; porque el movimiento de rotacion al rededor de *ND*, no puede cau-

causar ninguna presion en el plano ; luego siempre le quedará al centro de gravedad *G* una fuerza para arrimarse al plano. Luego quando no hay rozamiento , si el trompo no ha recibido al principio mas movimiento de rotacion que al rededor de su ege de figura , deberá caerse. Fig.

No sucede lo mismo quando hay rozamiento. Porque en este caso la resistencia que hay en *N* ; se esperimenta no en la direccion de la perpendicular *NK*, sino en la de una linea *NK'* que forma con el plano *HZ* un ángulo igual al ángulo del rozamiento , y pasa por alguno de los puntos *N* por los quales roza la punta. Sean los que fueren dicho ángulo y dicho punto , la resistencia que obra en la direccion *K'N* equivale á una fuerza que obrase en el cuerpo por una direccion contraria ; como su direccion no pasa por el centro de gravedad , ha de causar un movimiento de rotacion en el cuerpo ; quiero decir , que ha de hacer variar su movimiento actual de rotacion ; pero á mas de esto se ha de comunicar toda entera al centro de gravedad. Imaginemos , pues , que *Gl* paralela á *NK'* sea dicha fuerza ; si la vertical *Gn* representa la de la pesantez , é imaginamos el paralelogramo *Glmn* , la diagonal *Gm* será la fuerza que tendrá en realidad el centro *G*.

Sentado esto , permaneciendo unos mismos el ángulo *lGn* , y la fuerza *Gn* , quanto mayor fuere la fuerza *K'N* , y por lo mismo la fuerza *Gl* , tanto mas se arrimará la linea *Gm* á la linea *Gl* ; quiero decir , que tanto mas procurará el punto *m* levantarse sobre *G*. Resta saber , pues , si así por la naturaleza del rozamiento , como por la figura del cuer-

Fig. 149. cuerpo, y por su movimiento de rotacion, la razon entre la fuerza $K'N$ ó la fuerza Gl, y la fuerza Gn de la pesantez, puede crecer bastante para que el punto m llegue á estar mas alto que G; en este caso será evidente que el centro de gravedad puede levantarse respecto del plano, sin que á pesar de esto la punta N se aparte de él, porque el movimiento de rotacion que procede de la fuerza en la direccion de $K'N$, procura arrimar otra vez la punta al plano. Pero 1.° como el cuerpo descansa sobre una punta, no podemos menos de admitir que las partes de la punta se introducen mas adentro que si el cuerpo descansára sobre una superficie sensible. 2.° respecto del movimiento de rotacion al rededor de ND, y al impulso de la pesantez, la presion que se hace en N no es ni con mucho el efecto único de la pesantez. Para formar juicio cabal de esta presion, es preciso figurarse 1.° que por el impulso de la pesantez, las partes de la punta N se aplican desde luego al plano. 2.° Por razon del movimiento de rotacion al rededor de ND, y del impulso de la pesantez, la presion que se hace en N, no es ni con mucho el efecto único de la pesantez. Para formar juicio cabal de esta presion, hemos de considerar 1.° que por razon de la pesantez las partes de la punta N se aplican primero al plano. 2.° que por el rozamiento están detenidas allí con cierto grado de fuerza. 3.° que por el movimiento de rotacion hacen fuerza para introducirse mas en el plano; en esto no pondrá duda ninguna el que considerare con qué facilidad los instrumentos cuyo uso

uso es agugerear dando vueltas, llegan á taladrar una vez Fig.
que se les ha abierto el camino con el mas leve hoyo; pero por la figura del trompo es de todo punto exacta esta comparacion: las partes de la punta se introducen por medio del rozamiento, y con esto es tanto mas poderoso el movimiento de rotacion para profundizar ó intentarlo. Este movimiento que por otra parte es tanto mas rápido, y tanto mas eficaz para profundizar y comprimir la superficie *XZ*, quanto mas distan las partes del cuerpo del ege *ND* á medida que están mas apartadas del punto *N*, ha de causar los mismos efectos que en dichos instrumentos, esto es, apretar tanto mas las partes de la punta. Por consiguiente todo conspira para manifestar que quanto mas abulta la figura del trompo apartándose de la punta, tanto mas rápido es su movimiento de rotacion, tanto mayor será tambien la fuerza en la direccion de *Gl* respecto de la pesantez, y tanto mas por consiguiente el movimiento *Gm* procura levantar el centro de gravedad sobre el plano. Pero es evidente que quanto mayor fuere la fuerza que apoyare la punta, y quanto mayor fuere al mismo tiempo la fuerza con que el centro procura levantarse, tanto mayor será la disposicion del ege *ND* para arrimarse á la perpendicular al plano; por manera que en llegando *ND* á ser vertical, despues de algunos balances, si las eminencias sobre que descansa la punta, no fueren muy desiguales, se le verá al cuerpo saltar continuamente encima del plano con movimientos verticales muy pequeños y súbitos; esto es lo que se repara con efecto quan-

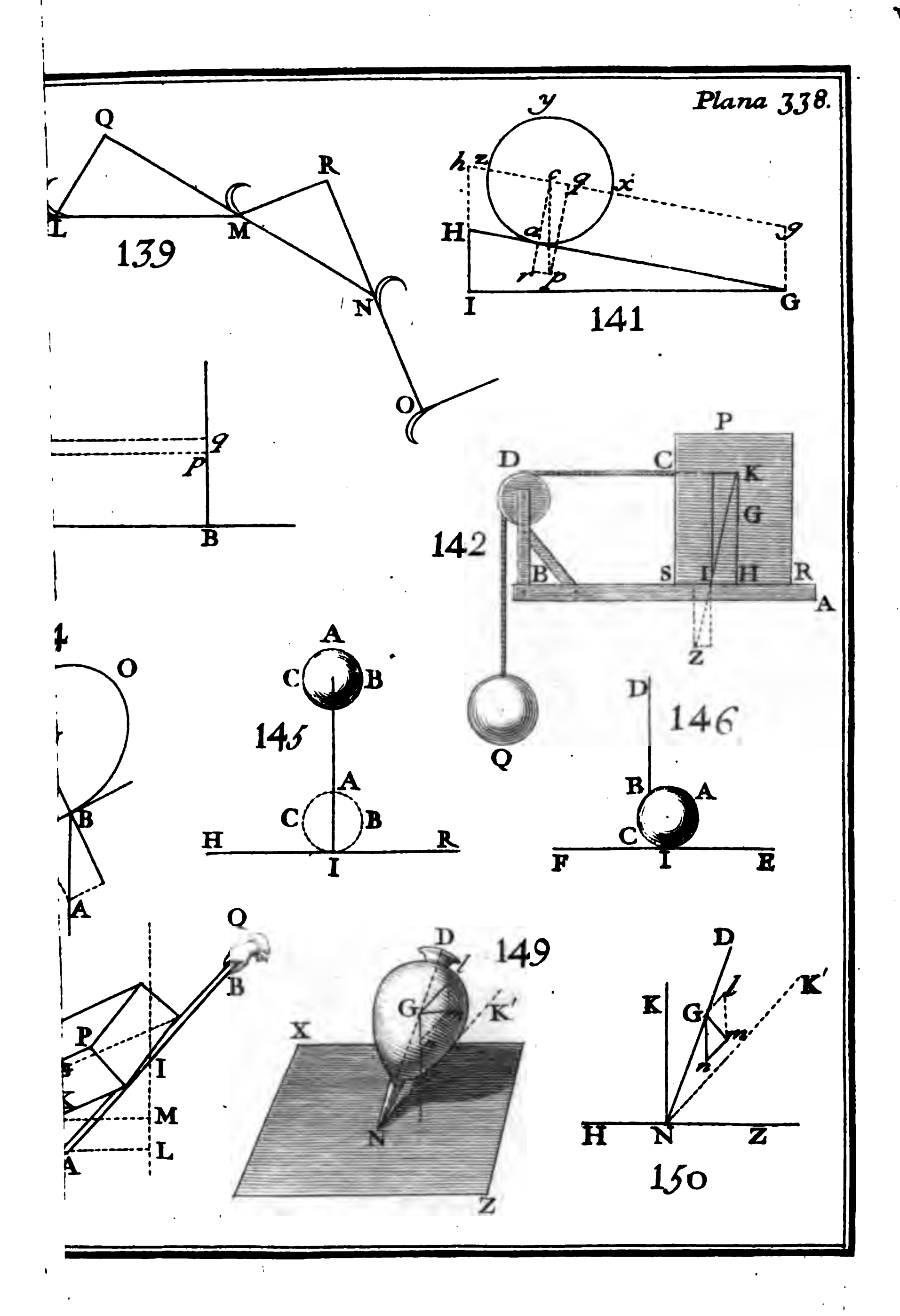
Fig. do la punta remata en una superficie plana cortada muy igual y perpendicular al ege.

A la esplicacion que acabamos de dar añadiremos que la esperiencia confirma lo que hemos dicho; es á saber que la presion es mucho mayor que si sola la pesantez aplicára las partes al plano; porque quando el trompo se mueve sobre alguna materia flexible, se vé que al instante la punta se mete en un hoyo que ella misma hace; y si se le coge en la mano, se esperimenta una presion mucho mayor que si el trompo no se moviera.

La misma esplicacion está diciendo que el hecho pende esencialmente 1.° de ser la punta pequeña respecto de las distancias que hay entre las demás partes y el ege *ND*. 2.° De que estas rueden con rapidez; por manera que segun concurriesen mas ó menos estas condiciones, el hecho será mas ó menos sensible; por consiguiente no todos los cuerpos son igualmente á propósito para manifestar el mismo fenómeno que, segun se vé, pende del rozamiento.

De aquí se sigue que en un plano inclinado el trompo ha de procurar volver no á la vertical, sí á la perpendicular al plano. Pero como al mismo tiempo ha de resbalar por la longitud del plano, y este movimiento pone al cuerpo en la precision de vacilar mucho andando por las desigualdades del plano, le costará mas trabajo permanecer en la situacion perpendicular al plano, que si fuera orizontal.

DEL



Q
R
L
M
139
N
O
y
h z
c q x
H
a
9
r p
I
141
G
q
p
B
P
D
C
K
G
142
B
S
I
H
R
A
Z
Q
O
A
C
B
145
A
C
B
H
R
I
B
A
D
146
B
A
C
F
I
E
Q
B
P
I
M
L
A
D
149
G
K'
X
N
Z
D
K
G
l
K'
m
n
H
N
Z
150

Fig.

DEL EQUILIBRIO, Y DEL MOVIMIENTO EN LAS MÁQUINAS, Ó

DE LA ESTÁTICA.

415 AUnque el destino general de las máquinas es comunicar, repartir ó distribuir el impulso de las fuerzas, no siempre se usan para aumentar el efecto de que sería capaz la fuerza motriz, si obrára inmediatamente en el mobil; no se lleva en algunas ocasiones otra mira que la de comunicar dicho impulso ácia una direccion determinada, para cuyo fin sirven, por egemplo, las *Poleas fijas.* En otras ocasiones solo se lleva el intento de sujetar el mobil á que ande espacios ajustados á ciertas condiciones dependientes del tiempo, ó de otras circunstancias qualesquiera; cuyas condiciones no siempre requieren que crezca el impulso de la fuerza motriz al tiempo de comunicarse: en los reloges se vé la prueba de esto.

Varían el número y la naturaleza de las máquinas segun varían los fines para que se inventan. Pero para poder determinar sus efectos, no es preciso haberlas considerado todas; porque no obstante de haberlas muy compuestas, y de muchísimas especies, no son todas ellas mas que combinaciones de un número bastante limitado de máquinas sencillas ó simples. Declararémos primero las propiedades de estas; y manifestarémos despues con muchos egemplos la

Fig. aplicacion que de estas propiedades se ha de hacer para apreciar los efectos de las máquinas compuestas.

Cinco son las máquinas simples, es á saber, la *Máquina funicular*, la *Palanca*, la *Polea*, el *Torno*, y el *Plano inclinado.*

Si considerásemos estas máquinas solo respecto del equilibrio, las podríamos reducir á dos, y tambien á una sola; es á saber á la palanca. Pero quando las consideramos respecto del movimiento, dá motivo la naturaleza de cada una de ellas á consideraciones que la son peculiares, y que nos obligan á tratar de cada una separadamente.

De la Máquina funicular.

416 Llámase *Máquina funicular* aquella en que no se hace uso sino de cuerdas para sostener un peso, ó contrarrestar muchas potencias.

417 Supondremos primero que son las cuerdas cuerpos perfectamente flexibles y destituidos de pesantez: despues atenderemos á los efectos que han de resultar de ser las cuerdas cuerpos pesados, y de no ser perfecta su flexibilidad.

Es facil percibir que, en virtud de los dos supuestos sobre que caminamos, es indiferente para la comunicacion de las fuerzas que sea el diámetro de las cuerdas mayor ó menor: se puede siempre substituir con el pensamiento en lugar de las cuerdas un hilo que pase por el ege del cilindro que forman, y suponer que la fuerza aplicada á la cuerda obra solo por medio de este hilo.

Sir-

Sirven las cuerdas para comunicar el impulso de las fuerzas, sea inmediatamente, sea aplicando las cuerdas á las máquinas. Pero para apreciar los efectos de las potencias aplicadas á las máquinas por medio de las cuerdas, es preciso conocer primero los efectos que pueden causar las potencias quando obran por medio de solas las cuerdas. Fig.

418 Consideraremos primero tres potencias *P*, *Q*, *R* que obran unas contra otras por medio de las cuerdas *AP*, *AQ*, *AR* unidas por el nudo *A*; y suponiendo que conocemos las direcciones *AP*, *AQ*, *AR*, propongámonos determinar las condiciones necesarias para que estas tres fuerzas hagan equilibrio, y la razon que entre ellas ha de haber. 151

Es evidente 1.° Que estas tres fuerzas han de estar en un mismo plano. Porque si una de ellas, por egemplo la fuerza *P*, no estuviera en el plano de las otras dos, siempre nos la podríamos figurar (73) resuelta en otras dos fuerzas tales, que la una estaría en dicho plano, y la otra sería perpendicular al mismo plano, y lo sería por consiguiente á cada una de las dos fuerzas *P* y *Q*; luego dicha fuerza de ningun modo obraría contra estas dos últimas; luego no habria nada que la destruyese; luego tampoco habria equilibrio.

2.° Estando las tres fuerzas en un mismo plano, es preciso, si han de formar equilibrio, que una qualquiera de ellas, pongo por caso la fuerza *P*, gaste dos conatos, el uno igual y contrario á la fuerza *Q*, el otro igual y contrario á la fuerza *R*.

Fig. Pero si despues de prolongadas *RA* y *QA*, representamos por la linea *AD* la fuerza *P*, y sobre *AD* como diagonal formamos el paralelogramo *ACDB* cuyos lados *AB*, *AC* estén en la prolongacion de *QA* y *RA*, los dos lados *AB*, *AC* representarán (73) dos fuerzas que si obrasen juntas ácia dichas direcciones producirian el mismo efecto que la fuerza *P*. Luego son *AB* y *AC* los conatos que *P* opone en realidad á las dos fuerzas *Q*, *R*; luego para que se verifique el equilibrio es preciso que *BA* pueda representar *Q*, y *CA* pueda representar *R*, en el supuesto de ser representada *P* por *DA*. Luego se ha de verificar que *P* : *Q* :: *AD* : *AB*, y *P* : *R* :: *AD* : *AC*, esto es, *P* : *Q* : *R* :: *AD* : *AB* : *AC*. Esta es la razon que ha de haber entre las tres fuerzas en el caso del equilibrio.

419 Ya que las dos fuerzas *Q* y *R* han de ser iguales á las dos fuerzas *AB*, *AC* que componen la fuerza *P*, podemos decir que quando hay equilibrio entre tres fuerzas, dos qualesquiera han de tener con la tercera la misma razon que tienen dos fuerzas primitivas con su derivada.

420 Luego tendremos (81) tambien *P* : *Q* : *R* :: *sen* BAC : *sen* CAD : *sen* DAB, ó (*prolongando* PA *ácia* S) :: *sen* RAQ : *sen* RAS : *sen* QAS; *y por consiguiente quando están tres fuerzas en equilibrio, cada una es representada por el seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos, prolongadas si fuese menester.*

421 Una vez que las tres fuerzas *P*, *Q*, *R* entre las quales ha de haber equilibrio, son representadas por *AD*, *AB*,

AB, *AC*, ó (lo que viene á ser lo propio) por los lados Fig. *AD*, *AB*, *BD* del triángulo *ABD* cuyos ángulos *ABD*, *BDA*, *DAB* son iguales á los ángulos *CAQ*, *RAS*, *QAS* que determinan las direcciones de dichas fuerzas, se echa de ver que se reducen á cuestiones de Trigonometría las que se pueden proponer acerca de los valores y de las direcciones de las fuerzas que han de formar equilibrio. Por egemplo, si dados los valores de las tres fuerzas *P*, *Q*, *R* se preguntase quáles han de ser sus direcciones para que haya entre ellas equilibrio, se habria de resolver (I. 675) el triángulo *DBA* cuyos tres lados son conocidos; y los ángulos que se sacasen por medio de esta resolucion, determinarian los que habrian de formar unas con otras las direcciones de las potencias. Si los datos fuesen la fuerza *P*, la fuerza *Q*, y el ángulo *PAQ* de sus direcciones, ó su suplemento *QAS* = *DAB*; en este caso serían conocidos en el triángulo *DAB* los dos lados *AD*, *AB*, y el ángulo comprehendido *DAB*; se podría, pues, calcular (I. 677) *DB*, ó el valor de la fuerza *R*, y el ángulo *BDA* igual al ángulo *SAR* que ha de formar la direccion de *R* con la direccion de *P*. Si fuesen dados los ángulos que han de formar las tres direcciones, solo se podria averiguar la razon que habría entre las tres fuerzas, porque no sería posible hallar su valor absoluto (I. 638). En todos los demás casos se hallará por la proposicion que acabamos de demostrar (420) lo que se buscare, con tal que haya tres cosas conocidas.

422. Si en lugar de haber dos potencias *Q* y *R* apli-

Fig. cadas á los dos cordones, estuviesen estos dos cordones afianzados en Q y R, ó en otro punto qualquiera de sus direcciones, espresarian AB, AC los conatos que dichos puntos fijos contrarrestarian.

151. 423 Si en vez de suponer que están los tres cordones afianzados con un nudo en el punto A, estuviese apli-
152. cada la potencia P á un cordon, en cuyo estremo hubiese una sortija, por la qual pasase la cuerda QAR; en este caso no estaría á nuestro arbitrio señalar las direcciones de los tres cordones. No bastaría entonces que el esfuerzo AB siguiera la direccion QA, y fuese igual á la fuerza Q, ni que pudiéramos decir otro tanto de AC respecto R: sería menester á mas de esto que no se pudiera correr la sortija; para lo qual sería indispensable que el ángulo QAS fuese igual á SAR, esto es, fuese tal la direccion de la potencia P, que dividiera el ángulo QAR en dos partes iguales. Como quiera, siempre se verificaría que $P : Q : R ::$ sen QAR: sen SAR: sen QAS; pero como $SAR = QAS = \frac{1}{2}QAR$, esta serie de razones vendría á ser $P : Q$, $R ::$ sen QAR: sen $\frac{1}{2}QAR$: sen $\frac{1}{2}QAR$; de suerte que serían iguales las dos potencias R y Q.

424 Lo mismo sucede quando la cuerda RAQ tirada por las dos potencias R y Q abraza un punto fijo A. Las dos potencias R y Q han de ser iguales, y la direccion de la presion que entonces padece dicho punto fijo, ha de estar en una línea que divida el ángulo QAR en dos partes iguales, y se ha respecto de la una de las dos potencias,

cias, como el seno de QAR al seno de su mitad. Fig.

425 De todo lo dicho hasta aquí se saca con suma facilidad el modo de determinar las condiciones del equilibrio entre quantas potencias se quisieren aplicadas á diferentes cordones unidos por un mismo nudo ó por nudos distintos.

Supongamos que cada nudo no une mas de tres cordones, y que todos están en un mismo plano, y del mismo modo que lo pinta la figura. La potencia P obra contra los dos cordones AT, AB. Prolonguemos, pues, las direcciones de estos, y espresando por AF la potencia P, formemos sobre AF como diagonal, y con las prolongaciones AE, AD como lados, el paralelogramo $ADFE$, será preciso que AE esprese T; y la tension ó tirantez del cordon BA la espresará AD; de suerte que si llamamos a esta tension, tendremos $P : T : a :: AF : AE : AD$, ó $P : T : a ::$ sen DAE : sen FAD : sen FAE, ó (por ser TAD suplemento de DAE) :: sen TAD : sen FAD : sen FAE. 153.

Concibamos la fuerza AD aplicada en B en la direccion de BI igual á AD, y en la misma recta que ella. Obra BI contra la potencia Q, y contra el cordon BC: prolongando, pues, como antes los cordones QB y CB, y formando el paralelogramo $GBHI$, será BH el valor que ha de tener la potencia Q, y BG la tension del cordon CB. Tendremos, por la misma razon, llamando b esta tension, $a : Q : b ::$ sen GBH : sen IBG : sen IBH.

Concibamos la fuerza BG aplicada en C en la direccion

CK

Fig. *CK* igual á *BG*, y en la misma recta que ella. Obra *CK* contra *S*, y contra *R*. Luego si prolongamos *RC* y *SC*, y formamos como antes el paralelogramo *MCLK*, espresará *CM* el valor que ha de tener la fuerza *R*, y *CL* el que ha de tener la fuerza *S*. Por lo mismo tendremos $b : R : S ::$ sen *MCL* : sen *KCL* : sen *MCK*.

Y si quisiéramos sacar inmediatamente la razon entre la tension *T* de una porcion qualquiera *TA* de la cuerda, y la tension de otra porcion qualquiera, pongo por caso de *CS*, lo conseguiríamos facilmente del modo siguiente.

Con tomar de las series de razones halladas hasta aquí no mas que las que pertenecen á las tensiones de las partes de la cuerda *TABCS*, tendremos

$T : a ::$ sen *FAD* : sen *FAE*

$a : b ::$ sen *GBH* : sen *IBH*

$b : S ::$ sen *MCL* : sen *MCK*;

multiplicando por orden las razones sacarémos $T : S ::$ sen *FAD* × sen *GBH* × sen *MCL* : sen *FAE* × sen *IBH* × sen *MCK*. Y si quisiéramos sacar la razon entre la tension *T* y la tension *b*, bastaría multiplicar las dos primeras proporciones; y así de las demás.

Si quisiéramos hallar las razones de las potencias unas con otras, lo lograríamos solo con sacar de las series de razones que hemos hallado, la razon que tienen dos potencias consecutivas con la tension de un mismo cordon, y saldría

P:

Fig.

$P : a :: \text{sen } TAD : \text{sen } FAE$

$a : Q :: \text{sen } GBH : \text{sen } IBG$

$Q : b :: \text{sen } IBG : \text{sen } IBH$

$b : R :: \text{sen } MCL : \text{sen } KCL$;

multiplicando estas quatro proporciones, y reduciendo (I. 201), $P : R :: \text{sen } TAD \times \text{sen } GBH \times \text{sen } MCL : \text{sen } FAE \times \text{sen } IBH \times \text{sen } KCL$; y si no quisiéramos mas que la razon de *P* á *Q*, bastaría multiplicar las dos primeras proporciones.

Todo esto dá bastante á entender lo que se debería practicar respecto de un mayor número de potencias, y para comparar las tensiones de los cordones con las potencias mismas.

426 Si las potencias *P*, *Q*, *R* dividiesen en dos partes iguales los ángulos *TAB*, *ABC* &c. los ángulos *DAF*, *FAE* serían iguales, y los ángulos *GBH*, *MCL*, tendrian los mismos senos que los ángulos *IBH*, *MCK*, de donde, y de las razones de arriba inferiremos que en este caso estarán igualmente tirantes todas las partes de la cuerda *TABCS*.

427 Si en lugar de las potencias *P*, *Q*, *R*, abrazára la cuerda puntos fijos en *A*, *B*, *C*, la presion (424) que padecerian estos puntos, originada de la tirantez de las partes estremas de la cuerda, tendria tal direccion que dividiría cada ángulo en dos partes iguales; y sería igual la tirantez en cada una de las partes *TA*, *AB* &c. de la cuerda *TABCS* (426). Luego si dos potencias *T* y

S

Fig. 154. *S* tienen tirante una cuerda que abraza el ámbito de un polygono, será igual en todas partes la tension, de modo que las dos potencias han de ser iguales.

428 Quando estando los cordones en un mismo plano son mas de tres los que une un mismo nudo; ó quando están en diferentes planos, y son mas de quatro; en este caso aunque sean dadas las direcciones de los cordones, no son enteramente determinadas las razones entre las potencias, ni entre las tensiones de los cordones; quiero decir que si un número de potencias, que no bage del espresado número, se ha puesto en equilibrio con direcciones conocidas, se puede substituir en su lugar igual número de otras potencias dirigidas del mismo modo que no dejarán de ponerse en equilibrio, aunque haya entre ellas razones muy distintas de las que habia entre las primeras.

155. Supongamos para probarlo, que los quatro cordones *AP*, *AQ*, *AR*, *AS* están todos en un mismo plano, y que representando *AB* la fuerza *P*, y prolongando el cordon *SA* ácia *C*, concibamos la fuerza *AB* como compuesta de otras dos *AC*, *AD*, de manera que sea la primera igual, y directamente contraria á la potencia *S*; no hay circunstancia alguna que determine la direccion *AD* de la fuerza que ha de recibir el conato de las dos potencias *Q* y *R* juntas, acerca de cuya direccion solo sabemos que prolongada ha de pasar por dentro del ángulo *QAR*, á cuya condicion se puede satisfacer evidentemente de una infinidad de maneras. Por este motivo, si tomando á arbitrio

trio la direccion *AD*, sin mas condicion que la espresada, Fig.
formamos sobre *AB* como diagonal, y con los lados *AC*, *AD* el paralelogramo *ACBD*; y si formamos despues sobre *AD* como diagonal, y con las prolongaciones *AE*, *AF* de las direcciones de las dos potencias *Q* y *R*, el paralelogramo *AEDF*; si representa *AB* el valor de *P*, podrá representar *AC* el valor de *S*, *AF* el de *R*, y *AE* el de *Q*, porque obra la fuerza *AB* del mismo modo que obrarian las dos *AC*, *AD*, de las quales la primera que ha de contrarrestar *S* ha de ser $=S$; por lo que toca á la segunda *AD*, obra como obrarian las dos *AF*, *AE*, que para contrarrestar *R* y *Q* han de tener respectivamente los mismos valores que estas. Pero se echa de ver al mismo tiempo, que si se le diera á *AD* distinta direccion, tendrian *AC*, *AE* y *AF* distintos valores, tales no obstante que si se les dieran los mismos á las potencias en cuyas direcciones están, estas potencias se pondrian en equilibrio: es, pues, constante que en este caso, no mudándose las direcciones de las potencias, hay infinitos modos de ponerlas en equilibrio.

429 Lo mismo se verifica respecto de los cordones que salen de un mismo nudo, quando están en diferentes planos, y son mas de quatro. Pero quando no pasan de quatro, una vez dadas las direcciones, las razones que ha de haber entre las fuerzas aplicadas á dichos cordones, son determinadas.

Porque siempre podemos suponer que por dos qualesquie-

Fig. 156. quiera *AP*, *AS* de dichos cordones pasa un plano que, despues de prolongado lo que fuere menester, encontrará el plano *RAQ* de los otros dos en la direccion de una linea qualquiera *DAE*, cuya posicion está no obstante determinada por las direcciones de las quatro potencias. En este caso, si prolongamos la direccion *SA*, y despues de representar por *AB* la potencia *P*, formamos sobre *AB* como diagonal, y sobre las direcciones *AD*, *AC* como lados, el paralelogramo *DACB*, será *AC* el valor de la potencia *S*, y *AD* será la espresion de la fuerza que hace la potencia *P* contra las dos potencias *Q* y *R* obrando juntas. Luego si despues de prolongadas *QA* y *RA* que están en un mismo plano con *AD*, trazamos sobre *AD* como diagonal, y sobre las prolongaciones *AF* y *AG* como lados, el paralelogramo *AFDG*; serán *AF* y *AG* los valores correspondientes á las dos potencias *Q* y *R*.

430 Pero en qualquiera de estos dos casos; quiero decir, estén ó no los cordones en un mismo plano; como es indispensable para el equilibrio que se mantenga inmobil cada nudo, si resolvemos la fuerza ó tension de cada cordon aplicada á un mismo nudo en otras tres fuerzas perpendiculares entre sí, ó paralelas á tres rectas perpendiculares entre sí, será preciso (170) respecto de cada nudo, que la suma de las fuerzas paralelas á cada una de dichas lineas sea cero. (Escusamos prevenir que llamamos *suma* la suma de las fuerzas que obran ácia una direccion, menos la suma de los que obran ácia una direccion opuesta).

Si

Si los cordones afianzados en un mismo nudo, estuviesen Fig.
en un mismo plano, bastaría resolver en dos fuerzas paralelas á dos líneas perpendiculares entre sí, y tiradas en el mismo plano. En virtud de este principio se hallarán en todos los casos las condiciones de que pende el equilibrio, estando fijamente atados unos con otros los cordones.

Propondremos para probarlo un caso muy facil, procurando averiguar en virtud del espresado principio qué razon ha de haber entre tres potencias, que se hacen mutuamente equilibrio por medio de tres cordones unidos por un mismo nudo.

Representemos las tres potencias por las lineas AG, 157.
AB, AF, y para escusar resoluciones, resolvamos las dos potencias Q y R como se vé en la figura; quiero decir, cada una en dos; la una en la direccion de P; la otra perpendicular á esta misma direccion. En estos supuestos, si llamamos el radio 1, de los triángulos rectángulos BAC, FAI, sacaremos $BC = AD = AB$ sen QAC; $FI = AE = AF$ sen RAC; $AC = AB$ cos QAC; $AI = AF$ cos FAI. Luego inferiremos del principio que acabamos de sentar, AB sen $QAC - AF$ sen $RAC = 0$, y AB cos $QAC + AF$ cos $RAC - AG = 0$. De la primera de estas dos equaciones sacamos AB sen $QAC = AF$ sen RAC; y por consiguiente $AB : AF ::$ sen $RAC :$ sen QAC; esto es $Q : R ::$ sen $RAC :$ sen QAC; cuya proporcion concuerda de todo punto con lo que llevamos demostrado (420). Si de la primera equacion sacamos el valor de AF, y le subs-

Fig. substituimos en la segunda, tendremos AB cos QAC + $\frac{AB \cos RAC \text{ sen } QAC}{\text{sen } RAC}$ — AG = o, ó AB cos QAC sen RAC + AB cos RAC sen QAC = AG sen RAC. Pero (I.655) cos QAC sen RAC + cos RAC sen QAC = sen (QAC + RAC) = sen QAR; luego AB sen QAR = AG sen RAC; esto es, $AB : AG ::$ sen RAC : sen QAR, ó $Q : P ::$ sen RAC : sen QAR, cuya proporcion tambien concuerda de todo punto con lo que demostramos antes (420).

431 Averiguemos ahora cómo la pesantez de las cuerdas puede estorvar la comunicacion de la accion de las potencias.

Sean quantas potencias se quisieren aplicadas á una
158. misma cuerda sin pesantez $TABCS$ afianzada en dos puntos fijos T y S, ó de cuyos estremos tiran dos potencias T y S.

Es evidente que si prolongamos los dos cordones estremos TA, SC hasta que se encuentren en V, el esfuerzo derivado de las tensiones particulares de estos dos cordones estremos, ha de pasar por el punto V. Y como suponemos que hay equilibrio, la derivada de las tres potencias P, Q y R, y de las tensiones de los dos cordones intermedios AB y BC ha de pasar tambien por el punto V; porque para el equilibrio ha de ser igual y directamente opuesta á la derivada de las tensiones de los dos cordones TA y CS. Pero la derivada de las tres potencias y de las tensiones de los dos cordones intermedios, no es otra

que

que la derivada de las tres potencias solamente, porque ninguno de los dos cordones *AB* y *BC* tiene por sí accion alguna, ni por consiguiente causa alteracion ninguna en ninguna parte del systema. Luego la derivada de todas las potencias *P*, *Q*, *R* aplicadas á la cuerda pasa por la prolongacion *V* de los dos cordones estremos. Fig.

Ya declaramos antes (75 y sig.) el modo de hallar esta derivada; pero si fuesen paralelos los cordones, como quando las potencias *P*, *Q*, *R* son pesos, en este caso la direccion de la derivada no puede menos de ser paralela á la direccion de los pesos, y se determinará facilísimamente la direccion de dicha derivada con tirar por el punto *V* una paralela á la direccion de qualquiera de los pesos, esto es, una vertical.

Sean, pues, quantos pesos se quisieren aplicados á una 159.
misma cuerda sin pesantez; si prolongamos los dos cordones estremos, y tiramos por su punto de concurso *V* la vertical *VX*, se podrá reducir, con el pensamiento, el equilibrio de todo este systema, al de tres potencias aplicadas á tres cordones unidos por el nudo *V*, y la potencia cuya direccion fuese *XVZ* será la suma de los pesos. De aquí y de lo dicho (420) inferiremos que la tension *T* es á la tension *S*, como el seno de *XVS* es al seno de *TVX*.

Si consideramos ahora una cuerda pesada, como el 160.
conjunto de una infinidad de pesos pequeños uniformemente distribuidos sobre el ege de dicha cuerda, hallaremos que si *S* representa el punto donde la potencia está apli-

Fig. cada á la cuerda, y *T* el punto donde la cuerda está aplicada á una máquina, la fuerza que hace la potencia contra el punto *T*, se comunica en la direccion de la tangente *TV* de la curva que forma la cuerda por su peso: que esta fuerza no es igual á la de la potencia *S*, sino quando la vertical tirada por el punto de concurso *V* de las dos tangentes estremas divide el ángulo *TVS* en dos partes iguales; y que en general la accion de la potencia *S*, la que comunicaría, si no fuese pesada la cuerda, es á la que comunica juntamente con el peso de la cuerda, como el seno de *TVX*, es al seno de *SVX*.

161. 432 Hemos de prevenir que hablando con rigor, por grande que sea la fuerza con que se procura poner tirante una cuerda, jamás puede quedar perfectamente recta á no ser en la situacion vertical. Con efecto, supongamos que por medio de la cuerda *RAP* sin pesantez, sostienen el peso *Q* dos potencias iguales *P* y *R* cuyas direcciones forman un ángulo que se arrima infinitamente á los $180°$. Tendremos $Q : P ::$ sen CAD : sen CAB (420), ó (prolongando *DA*) :: sen CAS : sen $\frac{1}{2}CAD$; pero el ángulo *CAS* es infinitamente pequeño, por el supuesto de acercarse infinitamente á los $180°$ su suplemento *CAD*; y $\frac{1}{2}CAD$ se acerca infinitamente al valor de un ángulo recto: luego ha de ser *Q* infinitamente pequeña respecto de *P*; luego aun quando el peso *Q* es infinitamente pequeño, las dos partes de la cuerda forman un ángulo.

De esto se puede inferir que una fuerza muy pequeña *Q* ocasiona una tension muy grande en los cordones

AP,

AP, *AR* quando es muy obtuso el ángulo que forman. Fig.

En virtud de esto podemos esplicar, porque si sopla- 162.
mos por medio de un tubo *Aa* dentro de una cubierta ó bolsa flexible *aEBCa* en cuyo estremo *B* está atado un peso *P*, con soplar medianamente se consigue levantar el peso *P*, aunque sea de alguna consideracion. Podemos considerar cada mitad *aCB*, *aEB* de la seccion vertical de la bolsa como una cuerda que en cada uno de sus puntos está impelida de una fuerza perpendicular, igual á la presion que egerce interiormente el ayre contra los lados de la bolsa. La derivada de todas estas presiones ha de estar (431) en la direccion *FED*, quiero decir que ha de pasar por el punto donde concurren las tangentes en los estremos de dicha cuerda, y ha de tener con la fuerza que se gasta en la direccion *BD* la misma razon que sen *aDB* ó sen *aDu* con sen *FDa*. Pero siendo el ángulo *aDu* muy pequeño, el esfuerzo muy pequeño en la direccion *FD*, produce otro muy grande en la direccion *BD*; por la misma razon la presion que se hace en *aEB* causará un esfuerzo considerable en la direccion *BF*; luego el peso *P* se hallará tirado de dos fuerzas muy considerables en las direcciones *BD*, *BF*, y que serán tanto mayores quanto menor fuere el ángulo *FBD*, porque el conato que de ellas resultare se arrimará mas al valor de su suma.

433 Si en virtud de lo dicho (431) supone- 163.
mos que *TDHES* sea una cuerda de peso uniforme ó no uniforme, afianzada en los dos puntos fijos *T* y *S*, la qual en virtud de sola su pesantez toma cierta curvatura, es evi-

Fig. dente que podremos considerar dicha cuerda como un polygono de una infinidad de lados, cargado de pesos en todos sus puntos. Por consiguiente, si tiramos en las direcciones de los lados estremos de dicho polygono las tangentes *TV*, *SV* que se encuentren en *V*; y despues de tirar las verticales *VX*, *TY*, *SZ*, llamamos *R* el peso total de la cuerda, *T* y *S* las cargas de los garfios *T* y *S*, ó las tensiones de la cuerda en las direcciones *TV*, *SV*, resultará (431) *R*: *T*: *S*:: sen *TVS*: sen *VSZ* : sen *VTY*. Del mismo modo, si por un punto qualquiera *D* de la cuerda se tira la tangente *DF*, y se levanta la perpendicular *FI*, sacaremos (llamando R' el peso de la parte *SEHD* de la cuerda, y *D* la tension de dicha cuerda en *D*), R': *S*: *D* :: sen *SFD* : sen *DFI* : sen *FSZ*. Si se tira todavia otra tangente qualquiera *EM* que encuentre *DF* en *M*, y despues de levantada la vertical *MN*, se llama R'' el peso de la parte *EHD*, *E* la tension de la cuerda en *E*, se sacará R'': *E* : *D* :: sen *EMD* : sen *DMN* : sen *EMN*. Es, pues, siempre tal la curvatura de la cuerda que *siendo su peso ó el de una qualquiera de sus partes proporcional al seno del ángulo que forman unas con otras las tangentes tiradas por los estremos de la cuerda, ó de su parte, las tensiones en las direcciones de las tangentes son recíprocamente proporcionales á los senos de los ángulos que forman con la vertical.*

434 Consideremos todavía otro caso de la máquina funicular que junta tres cordones en cada nudo. Sea

A

ABCDEF un polygono funicular regular en cuyos ángulos están aplicadas las potencias *P*, *Q*, *R* &c. que obran desde el centro á la circunferencia, y que están en equilibrio unas con otras. Es evidente que todas estas potencias son iguales entre sí; que están igualmente tirantes todos los lados del polygono; y que la suma de todas las potencias es á la tension del uno de los lados del polygono, como el perímetro del polygono es al radio del círculo circunscripto. Porque las potencias son representadas por los senos de los ángulos iguales *FAB*, *ABC*, *BCD* &c. siendo así, que las tensiones de los lados del polygono lo son por los senos de los ángulos *ABO*, *OBC*, *OCB* &c. iguales tambien, y como en un triángulo *ABO* podemos considerar la mitad de cada lado como el seno del ángulo opuesto; se sigue que si llamamos n el número de los lados del polygono, x la tension de uno de sus lados, sacaremos $P + Q + R + S +$ &c: $x :: n \times \frac{AB}{2} : \frac{AO}{2} :: n \times AB : AO$, en cuya proporcion los dos últimos términos son el contorno del polygono, y el radio del círculo que le está circunscripto. Fig. 164.

Quando crece al infinito el número de los lados del polygono, llega á confundirse su perímetro con la circunferencia del círculo circunscripto; y en este caso la tension de cada uno de sus lados es la tension de la circunferencia en un punto qualquiera, en la direccion de la tangente en dicho punto. Así, si se le aplican á todos los puntos de una circunferencia de círculo flexible unas potencias que obren desde el centro á la circunferencia, y que estén en equili-

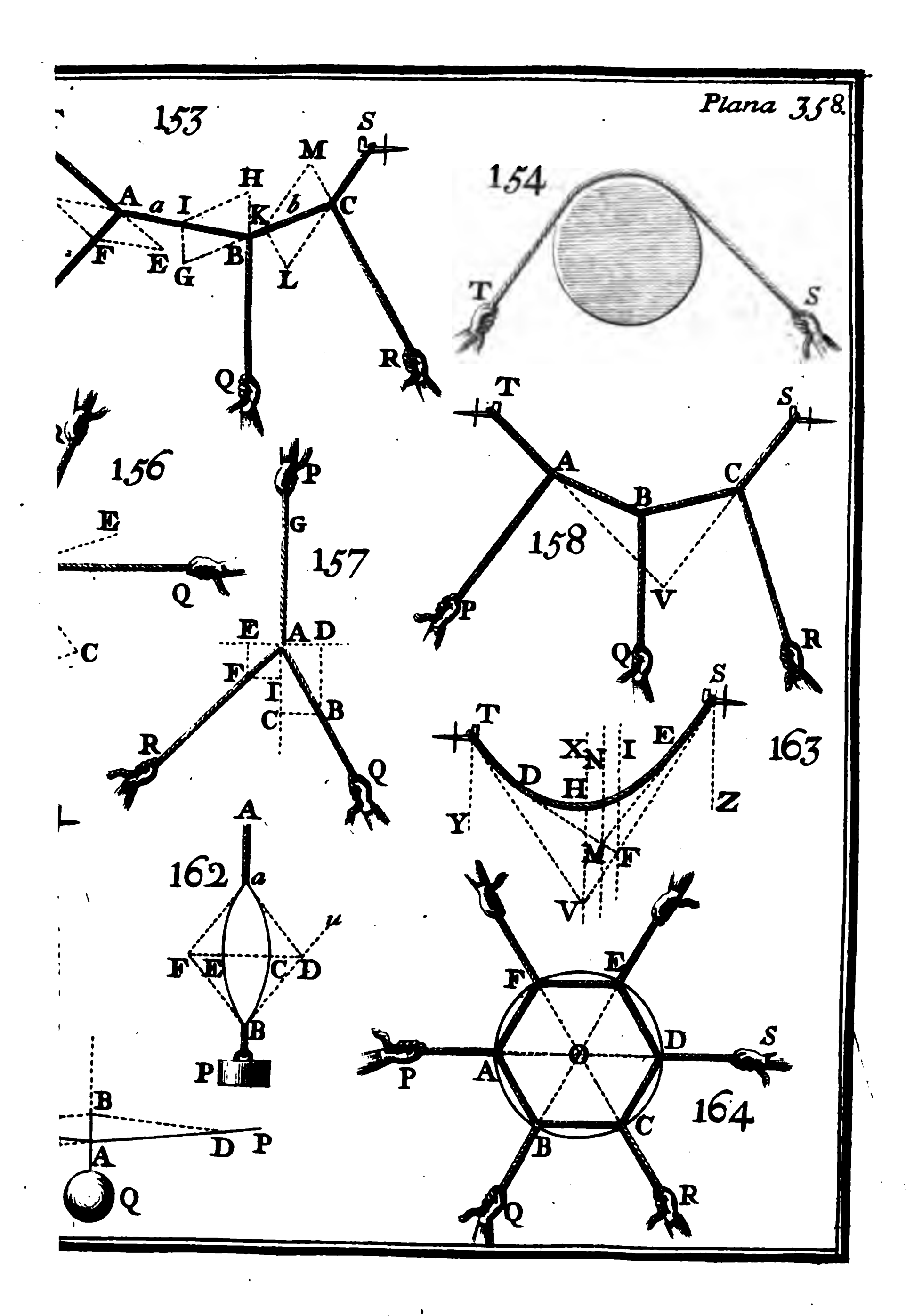
Fig. brio; todas estas potencias serán iguales; estará igualmente tirante en todos sus puntos la circunferencia, y la suma de todas las potencias será á cada una de dichas tensiones, como la circunferencia es al radio.

De la Palanca.

435 Llamamos *Palanca* una barra inflexible, sea la
165. que fuere su figura, que descansa de tal modo sobre uno
166. de sus puntos *C*, que no pueden darla las fuerzas que se la aplicaren, otro movimiento que un movimiento de rotacion, esto es, un movimiento para dar vueltas al rededor del punto *C*, que se llama *Punto de apoyo*, *Hypomoclio*, ó solamente *Apoyo*.

Supondremos primero que las fuerzas aplicadas á la palanca, y el apoyo están en un mismo plano; y consideraremos por ahora la palanca como que no tiene ni masa, ni pesantez. En el caso del equilibrio se puede atender muy bien á la pesantez de la palanca, considerándola como reconcentrada en su centro de gravedad, y como una nueva fuerza que en dicho punto se la aplica en una direccion vertical. Pero en el caso del movimiento no se debe suponer la masa reconcentrada en el centro de gravedad para apreciar el efecto que puede causar; se ha de suponer toda la masa reconcentrada en otro punto que determinaremos dentro de poco.

436 Supongamos, pues, que dos potencias *P* y *Q* aplicadas á los dos puntos *B* y *D* de la palanca *BCD* sea in-


153
154
156
157
158
162
163
164

inmediatamente, sea por medio de dos cordones ó dos varillas sin masa, obren contra dicha palança en las direcciones *BP*, *DQ*, y hagan equilibrio: hemos de determinar las condiciones de este equilibrio. Fig.

Como qualquiera de las dos potencias, pongo por caso la potencia *Q*, no forma equilibrio con la otra, sino por medio del hypomoclio *C*, es evidente que la potencia *Q* ha de producir dos esfuerzos de los quales el uno contrareste el de la potencia *P*, y el otro esté aniquilado por el apoyo *C*, y pase por consiguiente por este punto.

Prolonguemos indefinitamente las direcciones *PB* y *QD* que se encuentran en *A*, y tiremos *AC*. Podemos suponer (76) la potencia *Q* aplicada en *A* ácia *AQ*; en cuyo supuesto, si representa *AG* el valor de esta potencia, y si sobre *AG* como diagonal, y las direcciones *AC*, *BAE*, como lados contiguos, formamos el paralelógramo *AHGE*; representará *AE* (73) el esfuerzo que hace *Q* en la misma direccion de *P*, pero contrario á esta potencia; y *AH* el que hace contra el hypomoclio *C*. Con efecto, aunque el punto *A* no esté unido con los dos puntos *B* y *C*, no por esto deja de hacerse la distribucion de la fuerza *Q* del mismo modo que si lo estuviera. Porque es evidente que si aun sin alterar en nada las fuerzas y sus direcciones, se uniese el punto *A* con los tres puntos *B*, *C*, *D* por medio de tres barras inflexibles *AB*, *AC*, *AD* sin masa, esta circunstancia en nada alteraria el estado actual del systema, ni por consiguiente el modo con que la

Fig. fuerza *Q* comunica su impulso; pero en este último caso el impulso de la fuerza *Q* se comunicaría evidentemente del modo que acabamos de declarar; luego del mismo modo se comunica en el primer caso. Sentado esto, es preciso para que haya equilibrio, que la fuerza *AE* sea no solo directamente contraria, sino tambien igual á la fuerza *P*. Por lo que mira á la fuerza *AH*, basta para que se pierda, que vaya dirigida al punto *C*. Tenemos, pues, llamando *C* la carga que lleva el apoyo *C*, *Q* : *P* : *C* :: *AG* : *AE* : *AH*.

437 Si desde *A* ácia *B* tomamos *AI* = *AE*, y tiramos *IH*, se echa de ver que *AIGH* será un paralelogramo. Pero *AI*, *AG* que son los lados de este paralelogramo, espresan los valores y las direcciones de las dos fuerzas *P* y *Q*; luego (70) la diagonal *AH* representará su derivada; luego ya que *AH* representa tambien la carga del punto de apoyo, hemos de inferir que en general, la carga del punto de apoyo es cabalmente la derivada de las dos fuerzas aplicadas á la palanca; y que por consiguiente obran estas dos fuerzas contra el apoyo, del mismo modo que si se le aplicáran inmediatamente en direcciones paralelas á las que tienen actualmente.

Podríamos, si quisiéramos, manifestar de otro modo la verdad de esta proposicion, considerando que una vez que en lugar de la fuerza *Q* se pueden substituir las dos fuerzas *AE*, *AH* de las quales la primera se consume en contrarrestar la fuerza *P*, es la fuerza residua *AH* el unico efecto

to que producen las dos fuerzas *P* y *Q*, y por consiguiente Fig.
la fuerza que de ellas se deriva.

438 Abre, pues, la serie de las razones *Q* : *P* : *C* :: *AG* : *AE* : *AH* que hemos hallado (436), un camino para comparar las fuerzas *Q* y *P*, así unas con otras, como con la carga *C* del apoyo. Pero buscaremos otro camino todavia mas acomodado.

1.° En virtud de lo dicho (81) tenemos *AG* : *AE* : *AH* :: sen *HAE* : sen *HAG* : sen *GAE*, ó :: sen *HAI* : sen *HAG* : sen *GAI*; porque los ángulos *HAE*, *GAE* tienen los mismos senos que sus suplementos *HAI*, *GAI*; luego *Q* : *P* : *C* :: sen *HAI* : sen *HAG* : sen *GAI*; quiero decir, que las fuerzas *Q* y *P*, y la carga *C* del apoyo son representadas cada una por el seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos.

2.° Hemos visto (82) que en habiendo tres fuerzas, tales que la una de ellas sea la derivada de las otras dos, dos qualesquiera de dichas fuerzas son entre sí recíprocamente como las perpendiculares tiradas á sus direcciones desde un punto qualquiera de la direccion de la tercera.

Luego si desde un punto qualquiera de *AC*; si desde *C*, por egemplo, se tiran las perpendiculares *CL*, *CM* á las direcciones *PB*, *QD*, tendremos *Q* : *P* :: *CL* : *CM*. Y si desde un punto qualquiera de la direccion de *Q*, por egemplo desde *D*, se tiran las perpendiculares *DO*, *DR* á la direccion de la fuerza *P*, y de la carga del apoyo, tendremos

Fig. mos $P : C :: DR : DO$. Del mismo modo podríamos comparar la fuerza Q con la carga C.

Son ciertas todas estas proposiciones, sean las que fueren la figura de la palanca, y las direcciones de las potencias.

439 Quando son paralelas las direcciones de las dos potencias, en cuyo caso es paralela con ellas la derivada ó la carga del apoyo, las perpendiculares tiradas desde un mismo punto de la direccion de qualquiera de ellas, á las direcciones de las otras dos, están todas en una misma li-
167. nea *LCM*; se puede, pues, decir en este caso, que si se tira una linea *LCM* perpendicular á las direcciones de las potencias, cada potencia será representada por la porcion de dicha recta, compreendida entre las direcciones de las otras dos.

440 Si á mas de esto fuere recta la palanca, es facil sacar de los triángulos semejantes *CLB*, *CMD*, que las porciones *CB*, *CD*, *BD* tienen entre sí la misma razon que las porciones *CL*, *CM*, *LM*; luego se puede decir en este caso, que cada fuerza es espresada por la porcion de la palanca compreendida entre las direcciones de las otras dos; así $Q : P :: CB : CD$; esto es, que las dos potencias están en razon inversa de los brazos de palanca *CB*, *CD*; de suerte que la potencia Q ha de ser tanto menor para estar en equilibrio con la potencia P, quanto el brazo *CD* de la palanca, al qual está aplicada, es mayor que el brazo *BC* al qual está aplicada P. Por lo que mira á la car-

carga del apoyo, es igual á la suma de las dos potencias P y Fig.
Q, pues si representan CD, BC las potencias (439), representará BD la carga.

441 Aquí podremos probar una propiedad muy importante del centro comun de gravedad de dos cuerpos que están en equilibrio; y aunque la probaremos respecto de la palanca, la misma demostracion dirá por sí que se puede aplicar á las demás máquinas que se la refieren.

Esta propiedad consiste en que *el centro de gravedad comun de dos cuerpos que están en equilibrio está en el punto mas bajo respecto de la palanca; quiero decir, que su distancia á la orizontal que pasa por el punto de apoyo es siempre la mayor posible.*

Supongamos que estando la palanca en la situacion orizontal LM, estén respectivamente en P' y Q' los dos pesos equilibrados, y que esté en G su centro comun de gravedad, y que pasando despues la palanca á la situacion BD estén respectivamente los pesos en P y Q. Hemos de probar que en ambos casos es G su centro comun de gravedad. A este fin tiraremos la $L'M'$ paralela á LM.

Si los dos pesos estuvieran en la palanca, su centro comun de gravedad estaría (121) en la misma palanca en un punto (440) que la dividiría en dos partes recíprocamente proporcionales á los pesos. Pero si estos se ván apartando de la palanca ácia abajo, bajará tambien su centro comun de gravedad, manteniéndose constantemente (161) en uno de los puntos de la línea GC que es

la

Fig. la direccion de la fuerza derivada de las fuerzas de los pesos. Es, pues, preciso, que G divida en dos partes recíprocamente proporcionales á los pesos la linea tirada desde el un peso al otro.

1.° Estando la palanca orizontal, los triángulos $P'GL'$, $Q'GM'$ son semejantes por ser iguales los ángulos en G, y paralelos los dos lados verticales PP', QQ'; luego $P'G : GQ' :: GL' : GM'$. Pero $GL' = CL$, y $GM' = CM$ son recíprocamente proporcionales á los pesos; luego tambien lo son $P'G$ y GQ'; luego quando la palanca es orizontal, está en G el centro comun de gravedad de los pesos.

2.° Quando despues de mudada la situacion de la palanca están respectivamente en P y Q los dos pesos; han andado los espacios PP' y $Q'Q$ proporcionales á los arcos LB, MD que han trazado los estremos de la palanca; pues quanto mayores fueren estos arcos, tanto mayor trecho habrá bajado P', y subido Q'; dichos arcos son proporcionales á sus radios; esto es, á $CL = GL'$, y á $CM = GM'$, ó proporcionales á GP' y GQ', que segun acabamos de probar son proporcionales á GL' y GM'. Luego los triángulos PGP', QGQ' son semejantes (I.464); luego $PG : GQ :: GP' : GQ'$; luego el punto G divide tambien la linea PQ en dos partes recíprocamente proporcionales á los pesos; luego está tambien en el punto G el centro comun de gravedad de los dos pesos en la nueva situacion de la palanca, y como lo mismo probaríamos en otra nueva situacion qualquiera de la misma palanca, siendo siempre

pre unos mismos los supuestos, síguese que el centro comun de gravedad *G* de los dos pesos no puede bajar mas abajo de *G*, y que por consiguiente su distancia á la orizontal *LM* es la mayor posible. Fig.

442 Si fuere *Q* una potencia motriz, ó que está para comunicar el movimiento, *P* un mobil, y *C* un apoyo; distinguiremos con los Antiguos tres especies de palanca, segun varían las situaciones en que puede estar la potencia respecto del mobil y del apoyo. La figura 168 representa la *palanca de la primera especie*: está el apoyo entre la potencia y el mobil, y hace tanto mayor fuerza la potencia (440) quanto mas distante está del hypomoclio. La figura 169 representa la palanca *de la segunda especie*, en la qual está el mobil entre el apoyo y la potencia, que por consiguiente tiene siempre mas ventaja. Finalmente representa la figura 170 *la palanca de la tercera especie*, en la qual está la potencia entre el mobil y el apoyo: tiene, pues, en este caso la potencia una desventaja conocida, y por consiguiente lo erraría el que se valiese de esta palanca para aumentar el efecto de la fuerza motriz, esto es, para ponerla en parage de sobrepujar una fuerza mayor que ella. Pero como no siempre se lleva la mira de aumentar la fuerza motriz, segun hemos insinuado, no deja de ser muy util esta tercera especie de palanca en las máquinas de que nos valemos para aprovechar todos los movimientos que están á nuestra disposicion. Por este motivo sirve con ventaja en los telares para teger lienzos, paños, y otras telas, en cu- 168. 169. 170.

yas

Fig. yas máquinas no pueden las manos del oficial que tege la tela emplearse en dar el movimiento al telar: válese para esto de los pies, con los quales empuja los palos *CD*, y tira la cuerda *BR*, que pasando por la polea *R* vá á encontrar la armazon que sirve para alzar y bajar alternadamente los hilos, cuya armazon no pide mucha fuerza porque pesa poco. Lo propio se vé en la máquina del amolador.

443 Conviene prevenir, antes de pasar adelante, que prescindiendo del rozamiento, el punto de apoyo de una palanca no debe ser tenido como un mero susten-
166. táculo. Con efecto, si el apoyo en vez de introducirse en la palanca, no hiciera mas que tocar su superficie, es facil percibir que aun quando las dos potencias *Q* y *P* estuviesen una con otra en razon inversa de las perpendiculares *CM*, *CL*, no podrian estar en equilibrio en dicha palanca sino en solo un caso; es á saber, quando fuese la direccion *AC* perpendicular á *BD*, ó á la tangen-
165. te en *C*, porque si fuese *AC* oblicua, se echa de ver que comunicaría á la palanca un movimiento en la direccion *BD*; por lo que se equivocaría el que creyera, por egemplo, que prescindiendo del rozamiento, y de la pesantez de la palanca *PQ*, quedarian en equilibrio los dos pesos *P* y *Q* en la si-
171. tuacion inclinada, si *P* siendo á *Q* :: *CQ* : *CP*, la superficie de la palanca no hiciera mas que descansar sobre el punto *C*. El punto de apoyo qual se debe considerar á fin de que haya equilibrio en todas las situaciones de la palanca, ha de

de producir el mismo efecto que un asador que pasando Fig.
por C no le dejaría á la palanca mas libertad que para moverse al rededor del punto C. En una palabra quando decimos que basta que la derivada AC de las dos potencias 165.
pase por el punto de apoyo C, suponemos que el punto 166.
correspondiente C de la palanca no puede adquirir ningun movimiento; porque si le pudiera adquirir, yá no bastaría la condicion espresada. Por egemplo, si fuese tirada la palanca BD de tres potencias P, Q, R aplicadas á los tres 172.
cordones BP, DQ, CR, no habría equilibrio, si fuese AC la direccion de la derivada de P y de Q; aun quando pasára AC por el apoyo C, sería menester á mas de esto que el punto de concurso A estuviese en la linea CR.

444 Una vez que es preciso para que las dos fuer- 165.
zas P y Q se pongan en equilibrio por medio de la palanca BCD que estén en razon inversa de las perpendiculares CL, CM, ó que tengamos $P : Q :: CM : CL$, se infiere que $P \times CL = Q \times CM$, esto es, que los momentos de estas dos fuerzas tomados respecto del punto de apoyo, ó (96) respecto de otro punto qualquiera de la direccion AC, han de ser iguales.

445 Como toda fuerza arguye una inclinacion al movimiento, por *fuerzas* P y Q hemos de entender el producto de cierta masa por la velocidad que la comunicarian dichas fuerzas, si nada detuviera dicha masa. Sea, pues, M cierta masa, y V la velocidad que puede comunicarla la fuerza P obrando libremente en ella; sea tambien

M'

Fig. M' otra masa qualqniera, V' la velocidad que la puede comunicar la fuerza Q, será preciso para el equilibrio que $M \times V : M'V' :: CM : CL$.

446 Sea g la velocidad que la gravedad comunica
173. en un instante á toda parte material que esté libre; y sean M y M' dos cuerpos graves colgados de los dos cordones BIM, DKM', que descansando sobre los dos apoyos curvos I y K comunican enteramente (427) á la palanca BCD ácia las direcciones BI y DK, el impulso de la pesantez de dichos cuerpos; serán gM y gM' la medida de las fuerzas con que estos cuerpos obran (23); será, pues, preciso para el equilibrio que $gM : gM' :: CO : CN$, esto es $M : M' :: CO : CN$; luego en general para que dos masas que no esperimentan mas impulso que el de su pesantez, ó para que dos masas solicitadas de velocidades iguales, se pongan en equilibrio en una palanca, basta que dichas masas estén en razon inversa de las distancias que hay desde sus direcciones al punto de apoyo.

447 Pero si fuesen desiguales las velocidades, se echa de ver que no bastaría estuviesen las masas solamente en razon inversa de las distancias que huviere entre sus direcciones, y el punto de apoyo, deberian estar en la misma razon los productos de las masas por las velocidades.

448 Si llega el caso de que se les comuniquen á dos masas finitas y pesadas M y M' velocidades finitas y des-

desiguales en las direcciones de las cuerdas IM y KM'; como Fig.
la velocidad que puede comunicarles en un instante la pesantez es infinitámente pequeña, bastará para que se destruyan mutuamente las dos velocidades finitas, que las cantidades de movimiento que tendrian los dos cuerpos en virtud de dichas velocidades estén en razon inversa de CO y CN. Pero este equilibrio no durará sino un instante; porque luego que se huvieren destruido mutuamente dichas velocidades, los cuerpos M y M' sujetos al impulso de su pesantez, recibirán de ella cantidades de movimiento que seguirán la razon simple de las masas, y que por consiguiente no estarán en razon inversa de las distancias CO, CN.

449 Esto manifiesta la diferencia que hay entre el equilibrio de los cuerpos solicitados por sola la pesantez, y el de los pesos impelidos de velocidades finitas.

Conviene tambien reparar que no es posible poner en 168.
equilibrio un peso solicitado por sola su pesantez con un peso ó una masa impelida de una velocidad finita, por la misma razon que declaramos en otro lugar (230). De donde inferiremos que si el peso P está en equilibrio con una fuerza Q, que sea por egemplo la de un hombre, de un caballo &c. el conato de esta última no se dirige mas que á hacer que se mueva el punto D con una velocidad infinitamente pequeña. Por el contrario, si la fuerza Q aplicada en D obrase por una sacudida ó impresion finita, haría subir el peso P, sea el que fuese, á lo menos cierto tiempo que, quando fuere P algo considerable, podrá ser tal que no

Fig. perciba la vista este movimiento, que no por esto dejará de verificarse (230).

450 Las razones que hemos determinado (436 y sig.) entre las dos potencias *P*, *Q* y la carga *C* del apoyo
165. dán los principios para resolver esta cuestion general: *Dadas*
y sig. *tres de estas seis cosas, las dos potencias, la carga del apoyo, y sus direcciones, hallar las otras tres?* Quando no hay mas datos que las direcciones, solo se puede hallar la razon entre las potencias. Fúndase la resolucion de esta cuestion en lo dicho (421). Quando son paralelas las direcciones, la respuesta á la pregunta se saca de lo dicho (86 ó 439); y en general, si se trata de determinar la posicion del apoyo quando son conocidas las potencias *P* y *Q*, y determinadas sus posiciones, se reduce la operacion á hallar la derivada de dichas dos potencias, cuya operacion es facil en virtud de lo dicho (70).

451 No sucede lo propio quando son mas de dos las potencias aplicadas á la palanca; en este caso se pueden variar al infinito, conforme hicimos (428) respecto de las cuerdas, las razones ó las direcciones de algunas de las potencias, permaneciendo las otras las mismas, sin que por esto se pierda el equilibrio; pero hay esta diferencia entre la palanca y las cuerdas, que la condicion del equilibrio en la palanca es única; siendo así que respecto de las cuerdas son tantas las condiciones como los nudos (430). Bastará manifestar esta condicion en el caso de ser tres las

po-

potencías, para dar á entender que se verifica igualmente quando son mas. Fig.

452 Sean, pues, tres potencias *P*, *Q*, *R* cuyas direcciones sean *BP*, *EQ*, *DR*, en equilibrio en la palancas *BCED*. Obra, pues, la potencia *Q* contra cada una de la dos potencias *P* y *R*, y contra el apoyo *C*. Despues de prolongadas las direcciones, tomo desde el concurso *A* de *BP* y *EQ* la línea *AH* para representar la potencia *Q*, é imagino esta potencia resuelta en otras dos, la una *AG* igual y directamente opuesta á la potencia *P*, la otra *AF* tal que pueda contrarrestar la potencia *R* por medio del apoyo *C*. Luego si imaginamos la fuerza *AF* aplicada en la direccion *AFIL* en el punto *I* donde la direccion *DR* encuentra la fuerza *AF*, es preciso que pueda resolverse la fuerza *AF* ó *IL* en otras dos fuerzas, la una *IK* igual y directamente opuesta á la potencia *R*, la otra *IM* dirigida al punto de apoyo *C*. De todo esto resulta que la fuerza *Q* produce los tres efectos *AG*, *IK*, *IM*, de los quales los dos primeros son destruidos por ser iguales y directamente opuestos á las fuerzas *P* y *R*, y el último que se dirige al punto *C* no puede menos de ser tambien destruido. Pero ya que todas las fuerzas que obran en la palanca son *P*, *Q*, *R*, ó *AG*, *IK*, *IM*, *P* y *R*, de las quales *AG*, *IK*, *P* y *R* se destruyen, podemos inferir que es *IM* la derivada de las tres potencias *P*, *Q*, *R*; que por consiguiente la condicion única de que pende el equilibrio, es que la derivada de todas las potencias pase por el punto de apoyo *C*. Es, pues, evi- 174.

Fig. dente que las tres potencias P, Q y R obran en el apoyo C, como si se le aplicáran inmediatamente en direcciones paralelas á las que tienen actualmente. Es general esta proposicion, sea el que fuere el número de las potencias, porque siempre se puede suponer que una sola de las potencias contrarresta todas las demás, por medio de la resistencia del apoyo.

453 Ya que es C uno de los puntos por donde ha de pasar la derivada, ha de tener las propiedades que especificamos (95); quiero decir que en general, *quando muchas potencias que están en un mismo plano forman equilibrio unas con otras por medio de una palanca, sea la que fuere su figura; si desde el punto de apoyo se tiran perpendiculares á las direcciones de dichas fuerzas, y se multiplica cada fuerza por la perpendicular correspondiente, esto es, si se toman los momentos de dichas fuerzas respecto del punto de apoyo, la suma de los momentos que intentan hacer girar la palanca en una direccion, ha de ser igual á la suma de los momentos de las que intentan hacerla girar en una direccion contraria*; y si tomamos con signos contrarios los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar la palanca en direcciones opuestas, podremos decir generalmente que *la suma de los momentos ha de ser cero.*

454 Luego quanto hemos dicho (101) para hallar el valor y la direccion de la derivada, se aplica aquí para hallar la carga y la posicion del punto de apoyo, sea el que fuere el número de las potencias.

Lue-

455 Luego si en el supuesto de ser conocidos los dos pesos P y Q, la longitud y el peso BD de la palanca, quisiéramos determinar el punto de apoyo C, sobre el qual todo puede descansar en equilibrio; consideraríamos el peso de la palanca como una nueva fuerza vertical R aplicada al centro de gravedad E de dicha palanca, y sería preciso que el momento de P respecto del punto incógnito C, fuese igual á la suma de los momentos de los dos pesos R y Q, tomados tambien respecto del mismo punto incógnito C. Fig. 175.

Supongamos, por egemplo, que la palanca BD sea recta, de un grueso y de una pesantez uniforme; y considerando que por causa de las paralelas podemos substituir en lugar de las perpendiculares CI, CK, CL las porciones BC, CE, CD que tienen entre sí la misma razon, tendremos $P \times BC = R \times CE + Q \times CD$.

Sea a, la longitud de la palanca; x, la distancia BC; tendremos (127) $BE = \frac{1}{2}a$, $CE = \frac{1}{2}a - x$; $CD = a - x$. Sea p la gravedad específica de la palanca, esto es lo que pesa cada pulgada de largo de la palanca, valuando en pulgadas a y x; será pa su peso total R. Tendremos, pues, $Px = pa(\frac{1}{2}a - x) + Q \times (a - x)$, de donde sacaremos $x = \frac{\frac{1}{2}paa + Qa}{P + pa + Q}$. Sea $a = 24$ pulgadas, $P = 20$ libras, $Q = 4$ libras, $p = \frac{1}{12}$ de libra. Tendremos $x = \frac{120}{26} = 4\frac{8}{13}$ pulgadas; cuyo valor manifiesta que ha de estar el punto C á la distancia de $4\frac{8}{13}$ pulgadas del estremo B; y si no se atendiera al peso de la palan-

Fig. ca, saldría $x = \frac{Qa}{P+Q} = \frac{96}{24} = 4$ pulgadas.

Si dados los puntos B y C, se pidiese el punto D donde se ha de aplicar la potencia Q que suponemos conocida igualmente que P; llamaríamos BC, b, y BD, y; entonces la equacion de los momentos se transformaría en $Pb = py\,(\frac{1}{2}y - b) + Q(y - b)$, que dá $y = \frac{pb - Q \pm \sqrt{[(Q - pb)^2 + (2Pb + 2Qb)p]}}{p}$. El valor positivo dá la distan-

175. cia BD en la figura 175, y el valor negativo dá la dis-

176. tància BD en el supuesto de que no pese la distancia BC.

175. Para determinar á qué distancia y bastará el peso de la parte CD para hacer equilibrio con P, haremos $Q = 0$, y saldrá $y = \frac{pb + \sqrt{(p^2b^2 + 2pPb)}}{p}$.

177. Si suponiendo conocidas P, Q, BC, y la gravedad específica de la palanca DC, quisiéremos determinar á qué distancia CD ha de obrar la potencia D; llamarémos CD, y; BC, b; y espresará py el peso R; será, pues, preciso que $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, de cuya espresion será facil sacar y.

Qualquiera podrá hacerse cargo de que en la figura 175 quanto mas larga fuere la palanca, tanto mas habrá de disminuir la potencia Q hasta llegar á ser cero, y despues habrá de obrar en direccion contraria.

En la figura 177, á medida que crece la longitud de la palanca, vá primero en diminucion la potencia Q, pero hasta cierto término no mas, y pasado este término es preciso que crezca. Manifiestalo evidentemente la equacion $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$ que dá $Q = \frac{Pb + \frac{1}{2}pyy}{y}$, cuyo va-

lor

lor está diciendo que quando $y = 0$, Q ha de ser infinita; y que tambien lo ha de ser quando y es infinita; luego entre estos dos casos estremos, ha de tener valores finitos; luego para pasar del uno al otro ha de pasar por el menor valor posible. Fig.

Para averiguar donde tiene este *mínimo* de valor, igualarémos (III. 408) con cero la diferencial del valor de Q, sacada en el supuesto de no haber mas variable que y. Tendremos, pues, $-\frac{(Pb + \frac{1}{2}py^2)dy}{yy} + pdy = 0$, de donde se saca $y = \sqrt{\frac{2Pb}{p}}$. Luego el valor de la *mínima* potencia Q de que podemos hacer uso con una palanca pesada, de la la segunda especie, es $\sqrt{2Ppb}$, y la longitud de la misma palanca es $\sqrt{\frac{2Pb}{p}}$.

Se echa, pues, de ver que quando se quiere levantar con una palanca pesada un cuerpo F, se la debe dar á 178. la palanca una longitud determinada, y que dándosela, ó mayor ó menor, no se adelanta nada, antes hay que perder. Por lo mismo vá mucha diferencia de considerar la palanca como pesada, á considerarla como destituida de pesantez. En el egemplo que aquí proponemos, no se debe tomar por P el valor total del fardo F; yá determinamos antes (413) la parte que se ha de tomar.

456 Hasta aquí hemos supuesto que están en un mismo plano las fuerzas que se equilibran por medio de la palanca; si estuvieren en planos distintos, imaginarémos

Fig. 179. que por el punto de apoyo C pasen tres planos HI, KL, MN perpendiculares entre sí. Y como siempre se puede resolver una fuerza qualquiera en otras tres perpendiculares á tres planos dados de posicion, resolveremos cada una de las fuerzas dadas, en otras tres perpendiculares á los tres planos HI, KL, MN.

Sea P una de las que son perpendiculares al plano MN; y concibamos que por el punto V, donde su direccion encuentra al espresado plano, pase una linea qualquiera SVT que encuentre en S y T las intersecciones DE, AB de dicho plano con los otros dos. Siempre podemos figurarnos que la fuerza P está resuelta en otras dos Q y R paralelas con ella, y que obran en los puntos S y T. La espresion de la fuerza Q será (88) $\frac{P \times VT}{ST}$; la de la fuerza R será $\frac{P \times SV}{ST}$, ó si tiramos VX, VZ paralelas á SC y TC, de donde sale $ST : VT :: CS : VX$, y $ST : SV :: CT : VZ$, la fuerza Q será $\frac{P \times VX}{CS}$, y la fuerza R será $\frac{P \times VZ}{CT}$.

Pero se echa de ver que la fuerza Q intenta hacer girar al rededor del ege DE; y su momento respecto de este ege, que es $Q \times CS$, es $\frac{P \times VX}{CS} \times CS$, ó $P \times VX$, esto es, el mismo que el de la potencia P, si esta potencia, sin que varíe la distancia á que está del ege DE, obrase sobre el plano LK al qual es paralela. La fuerza R intenta hacer girar al rededor del ege AB, y su momento respecto de este ege, que es $R \times CT$, es $\frac{P \times VZ}{CT} \times CT$, ó $P \times VZ$, esto es, el mismo que el de la potencia P, si esta potencia, sin que variase la distancia á que está del ege AB, obrase

en

en el plano *HI* al qual es paralela. Procura, pues, la fuerza *P* causar dos movimientos de rotacion, el uno al rededor de *DE*, el otro al rededor de *AB*. Pero si discurriéramos del mismo modo, probaríamos que toda fuerza perpendicular al plano *KL*, intenta hacer girar al rededor del ege *AB*, y al rededor del ege *FG*; y que toda fuerza perpendicular al plano *HI*, intenta hacer girar al rededor de *DE*, y al rededor de *FG*. A mas de esto, el momento de la fuerza con que cada una intenta hacer girar al rededor de uno de los eges espresados, es el mismo que si dicha potencia obrase sobre aquel de los dos planos al qual es paralela, y que es perpendicular á dicho ege. Fig.

Sentado esto, si concebimos respecto de cada fuerza una resolucion semejante á la que hemos hecho respecto de la fuerza *P*, se echa de ver que reduciremos dichas tres fuerzas á que obren sobre los tres planos *KL*, *HI*, *MN*. Y como estos tres planos son perpendiculares entre sí, las que obraren sobre qualquiera de ellos, no pueden, ni ayudar, ni estorvar á las que obraren sobre qualquiera de los otros dos. Luego para que todas las fuerzas propuestas formen equilibrio, es preciso que todas las que obran sobre uno de los planos puedan equilibrarse unas con otras; pero para que esta condicion se verifique, es indispensable (453) que la suma de sus momentos respecto del punto *C* sea cero; luego una vez que los momentos de las fuerzas que despues de la resolucion obrarian sobre cada plano, son los mismos que si las fuerzas que los han engendrado obrasen sobre

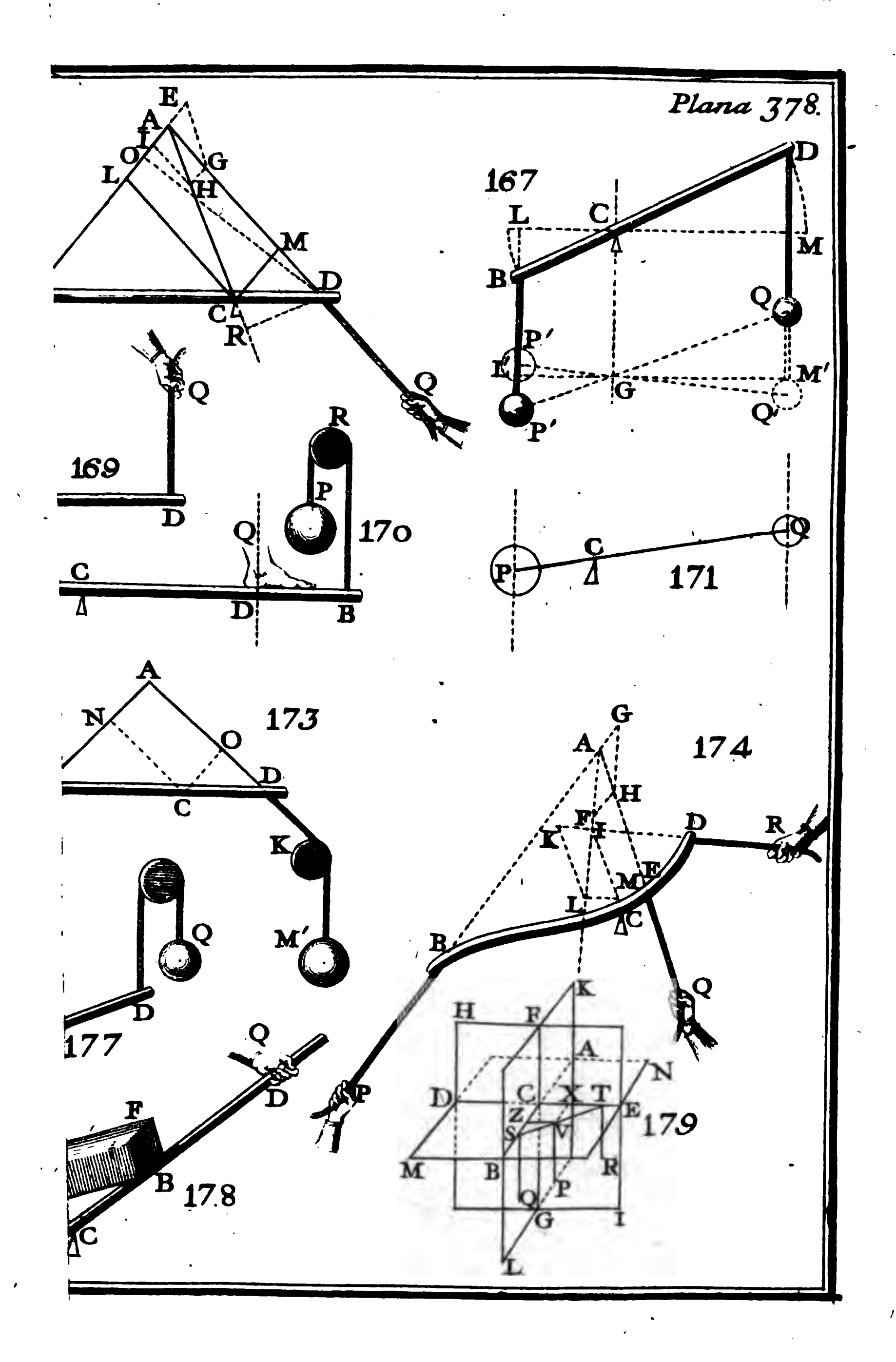
los

Fig. los mismos planos, sin que variase la distancia á que están del ege respecto del qual se consideran los momentos, podemos sentar esta regla general.

Concíbase que pasen por el punto de apoyo tres planos perpendiculares entre sí; resuélvase cada una de las fuerzas dadas en otras tres, perpendiculares á dichos planos. Tómense los momentos de cada una respecto de los dos eges que son las intersecciones del plano, al qual dicha fuerza es perpendicular con los otros dos planos; hecho esto, júntense (con los signos que fueren del caso) los momentos de todas las fuerzas que obran paralelamente á uno de los planos, é iguálese la suma con cero; practíquese lo propio respecto de cada uno de los tres planos.

457 Si la palanca, ó en general, si el cuerpo ó systema de cuerpos al qual están aplicadas las fuerzas que se han de equilibrar recíprocamente, no estuviera afianzado en un punto fijo, conforme hemos supuesto; entonces se tirarian los tres planos por el punto que se quisiere; y se habrian de verificar tambien las tres condiciones que hemos sentado para el equilibrio. Porque como no hay punto fijo, todas las fuerzas que obran sobre un mismo plano, se han de poder equilibrar unas con otras; pero en el caso actual no puede suceder sino en quanto su derivada es cero; luego una vez que la suma de los momentos de dichas fuerzas es igual (95) al momento de su derivada, es tambien preciso que cada una de dichas sumas de momentos sea cero.

Pe-


167
169
170
171
173
174
177
178
179

Pero en el mismo caso no bastan aún las tres condi- Fig.
ciones mencionadas; es preciso, á mas de esto (170) que la suma de todas las fuerzas perpendiculares á uno qualquiera de los tres planos, sea cero; de donde nacen tres condiciones mas; por manera que el equilibrio entre muchas fuerzas cuyas direcciones están en planos diferentes pende de seis condiciones, quando no hay punto fijo en el systema, y todas las partes del systema están sólidamente unidas unas con otras.

458 Se hace uso de la palanca en la mayor parte de las máquinas. Puede ser de madera, de hierro, de otra materia qualquiera, segun los usos para que ha de servir. Su grueso y resistencia han de corresponder á su longitud, á la materia de que fuere, y á la fuerza que ha de aguantar. Para determinar este grueso hay poco que esperar en la teórica, y lo mas acertado es acudir á la esperiencia.

459 Entre las máquinas en cuya estructura hay palancas, merece particular atencion aquella especie de puentes que llaman *Puentes levadizas.* Como la teórica de estas puentes no se halla comunmente en los libros de Mecánica, no puedo menos de darla aquí su lugar.

La figura que citamos es el perfil de una puen- 180.
te levadiza, cortada por el medio por un plano vertical, que la divide en dos partes de todo punto iguales y semejantes. Esta máquina se compone de un *tablero* figurado en la recta *AE*, el qual se mueve al rededor de dos eges *A*, que lleva en sus estremos; de dos maderos largos representa-

Fig. tados en el perfil por una misma línea *GM*, que dán vueltas al rededor de dos eges *K*; y cuyas partes anteriores *GK* se llaman *Sagitas*, y las posteriores *KM* se llaman *Básculas*; las dos básculas están unidas una con otra por medio de travesaños de madera; y todas las partes que hemos especificado se consideran como un solo y mismo cuerpo. Dos cadenas figuradas en $GN'E$ unen las sagitas con el tablero; le tiran ácia arriba quando la báscula baja, y recíprocamente, quando baja el tablero, sube la báscula.

460 Imaginemos que la puente levadiza haya llegado subiendo á una posicion qualquiera; que represente *T* el peso del tablero; *C*, el peso del systema de las dos cadenas; *F*, el del systema de las dos sagitas; y finalmente *B*, el del systema de las dos básculas, y del travesaño que las une. Hemos de considerar que todos estos pesos *T*, *C*, *F*, *B* obran en las direcciones de las verticales que pasan por sus centros de gravedad. Figurémonos las dos cadenas confundidas en una sola $GN'E$; y consideremos tambien primero esta cadena como una cuerda perfectamente flexible. Tírense por sus estremos las tangentes *GN*, *EN*; estas lineas se encontrarán (433) en un punto *N* que está en la direccion de la vertical *CNP* que pasa por el centro de gravedad de la cadena $GN'E$. Llamemos f y f' las tensiones de la cadena en *G* y *E*, en las direcciones de las tangentes *GN*, *EN*; y desde los puntos de apoyo *A* y *K* tírense respectivamente las perpendiculares *At*, *Ab*, *Kd*, *Kg*, *Ke* á las direcciones de las fuerzas T, f', f, F, B.

Sen-

Sentado esto, es evidente que se puede considerar AE Fig. como una palanca aislada, á la qual están aplicadas las dos potencias T, f' en equilibrio, y que por consiguiente tendremos (444) $T \times At = f' \times Ab$. Podemos considerar tambien GKM como una palanca aislada, á la qual están aplicadas las tres fuerzas f, F, B en equilibrio. Tendremos (453), pues, $f \times Kd + F \times Kg = B \times KE$, ó $B \times KE - F \times Kg = f \times Kd$.

En cuyas equaciones se pueden eliminar las tensiones f' y f, considerando que, por lo dicho (433), $f' = \frac{C \times \text{sen } GNP}{\text{sen } ENG}$, $f = \frac{C \times \text{sen } ENP}{\text{sen } ENG}$. Tendremos, pues, $T \times At = \frac{C \times \text{sen } GNP}{\text{sen } ENG} \times Ab$, $B \times Ke - F \times Kg = \frac{C \times \text{sen } ENP}{\text{sen } ENG} \times Kd$. Manifestemos el uso que de estas equaciones se puede hacer en la práctica.

461 Como el peso C de las cadenas es por lo regular muy corto en comparacion de los pesos T, F, B, y como por otra parte los puntos E y G están ambos, con corta diferencia, en una misma linea vertical EX; se puede suponer que las cadenas se confunden sensiblemente con la recta GE, sin atender á su curvatura. Podremos, pues, considerar los dos ángulos GNP, ENP como suplementos uno de otro, y como que tienen por consiguiente un mismo seno. Será, pues, $f' = f$, sensiblemente. Luego por ser $f' = \frac{T \times At}{Ab}$, y $f = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}$, será sensiblemente $\frac{T \times At}{Ab} = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}$. Llamemos 1 al seno total, y consideremos que $At = AH \times \text{sen } AHT$; $Ab = AE \times \text{sen } AEG$, sensiblemente; $Kd = KG \times \text{sen. } KGE$, sensiblemente; Kg =

Fig. $= KI \times \text{sen } KIF$; $Ke = KL \times \text{sen } KLB$; la equacion se transformará en $\frac{T \times AH \times \text{sen } AHT}{AE \times \text{sen } AEG} = \frac{B \times KL \times \text{sen } KLB - F \times KI \times \text{sen } KIF}{KG \times \text{sen } KGE}$.

462 Manifiesta esta equacion que como los senos de los ángulos que incluye, varían de una posicion de la puente levadiza á otra, siguiendo en su variacion una ley que pende de la especie particular del quadrilátero $AEGK$; esta especie no puede ser arbitraria, quando se quiere, que manteniéndose unos mismos los pesos T, F, B, como se mantienen con efecto, se verifique el equilibrio en todas las situaciones de la puente levadiza. Pero si suponemos que los lados opuestos del quadrilátero son iguales de dos en dos, quiero decir, si $AE = KG$, $AK = EG$, y que por lo mismo el quadrilátero guarde la figura *paralelográmica*, ó de un paralelogramo en todas las situaciones posibles, el equilibrio se verificará. Porque en este supuesto los dos ángulos AEG, KGE que son suplementos uno de otro, tendrán senos iguales; los tres ángulos AHT, KLB, KIF tendrán tambien senos iguales. De donde resulta que la equacion precedente se reducirá á $T \times AH = B \times KL - F \times KI$, ó $B \times KL = T \times AH + F \times KI$, en la qual no hay sino cantidades constantes, é independientes de la situacion de la puente levadiza. Por consiguiente con tal que el quadrilátero $AEGK$ sea un paralelogramo, la puente levadiza se mantendrá en equilibrio por sí, y sin el socorro de ninguna potencia estraña, en todas las situaciones en que se la pusiere. De donde resulta que es muy ventajosa para el caso actual la figura del paralelogramo, que tam-

tambien facilita la construccion y la maniobra. Fig.

463. Aunque en la equacion $B \times KL = T \times AH + F \times KI$ no entra el peso de las cadenas, y espresa el equilibrio la misma equacion en que estaría cifrado si no tuviesen las cadenas ninguna pesantez, no hay que estrañarlo. Todo esto es una consecuencia necesaria del supuesto sobre que caminamos de que guarde la puente levadiza en todas las situaciones posibles la figura paralelográmica. Si las cadenas tuvieren una pesantez sensible y comparable con los pesos T, F, B, será imposible que dicha figura subsista, considerando siempre las cadenas como perfectamente flexibles. Bien que lo dicho hasta aquí no permite duda alguna acerca de esto, daremos sin embargo una demostracion particular aplicándola á un caso en que parece que debería subsistir mas que en otros el paralelismo de los lados del quadrilátero *AEGK*.

464 Supongamos que el quadrilátero *AEGK* sea un 181.
paralelogramo; que los dos puntos *A* y *K* estén en una misma linea vertical, igualmente que los dos puntos *E* y *G*; y que las cadenas no tengan ninguna pesantez, ó que se consideren como hilos inestensibles sin pesantez; que todo el systema esté en equilibrio. Se echa de ver que el hilo *GE* está igualmente tirante en las direcciones *EG* y *GE*; y que si llamamos f' esta tirantez, tendremos exactamente $T \times AH = f' \times AE$; $B \times KL - F \times KI = f' \times KG = f' \times AE$; de donde se saca $T \times AH = B \times KL - F \times KI$.

Esta equacion se verificará de todo punto en todas las si-

Fig. situaciones posibles de la puente levadiza, y la figura paralelográmica del quadrilátero *AEGK* subsistirá constantemente, mientras fuere nula la pesantez del hilo *GE*. Atemos ahora un peso á este hilo, ó supongamos que las cadenas son pesadas; el equilibrio precedente no podrá subsistir; los puntos *G* y *E* se arriman uno á otro por precision; las cadenas adquieren la curvatura *G'NE'*; y el paralelogramo *AEGK* se transforma en la figura *AE'NG'K*. De donde hemos de inferir en general, por la razon inversa, que si el quadrilátero *AEGK* guardare la figura paralelográmica en todas las situaciones posibles, el peso de las cadenas se deberá considerar como nulo en comparacion de la tirantez de las cadenas, causada por las fuerzas *T*, *F*, *B*. Por consiguiente dicho peso no deberá hallarse en la equacion del equilibrio.

465 Hasta ahora hemos considerado las cadenas como perfectamente flexibles, pero no lo son, ni con mucho. Se componen de eslabones prolongados de hierro que no se pueden doblar en su longitud; fuera de esto, dichos eslabones por estar enlazados unos con otros, esperimentan un rozamiento que hace todavia mas dificultosa la flexibilidad de la cadena. Degemos, pues, el supuesto espresado, y sigamos otro del todo contrario; consideremos las cadenas como enteramente destituidas de flexibilidad, y como barras *GE* atadas en sus estremos con el tablero, y las sagitas, por medio de sortijas ó garabatos que en dichos estremos les dán entera libertad para moverse circularmente en el plano de la puente levadiza á medida que esta sube ó baja.

Sea

466 Sea $AEGK$ un quadrilátero qualquiera, compuesto de las mismas partes que la puente levadiza, que ha llegado á una posicion qualquiera. Desde los puntos de apoyo A y K bágense, como antes, las perpendiculares At, Kg, Ke á las direcciones de los pesos T, F, B; y tírense á la barra EG las perpendiculares Ab, Kd. Llamemos C el peso de dicha barra, reconcentrado en su centro de gravedad ó punto del medio O; y resolvamos este peso en dos fuerzas verticales que pasen por los puntos E y G, cada una de las quales vale por consiguiente (83) la mitad del espresado peso; y tiremos las lineas Am, Kn perpendiculares á sus direcciones. Es evidente que la barra EG está tirada igualmente en la direccion de su longitud, ácia EG y ácia GE. Luego si llamamos X esta fuerza de tension; la palanca AE, á cuyos puntos H, E están aplicadas tres fuerzas, dos verticales, es á saber H y $\frac{C}{2}$, y la tercera X en la direccion de EG, dará (453) para condicion del equilibrio, la equacion $T \times At + \frac{C}{2} \times Am = X \times Ab$. Fig. 182.

La palanca GKM, en cuyos puntos G, I, L están aplicadas quatro fuerzas, tres verticales que son $\frac{C}{2}$, F, B, y la quarta X en la direccion de la GE, dará para el caso del equilibrio la equacion $\frac{C}{2} \times Kn + X \times Kd + F \times Kg = B \times Ke$, ó $B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kn - F \times Kg = X \times Kd$. Si de cada una de estas equaciones sacamos el valor de X, inferiremos estotra equacion

$$\frac{T \times At + \frac{C}{2} \times Am}{Ab} = \frac{B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kn - F \times Kg}{Kd}.$$

Fig. Y como 1 representa siempre el seno total, será $At = AH \times \text{sen}\, AHT$, $Am = AE \times \text{sen}\, AEm$, $Ab = AE \times \text{sen}\, AEG$, $Ke = KL \times \text{sen}\, KLB$, $Kn = KG \times \text{sen}\, KGn$, $Kg = KI \times \text{sen}\, KIF$, $Kd = KG \times \text{sen}\, KGE$, y la equacion se transformará en $\frac{T \times AH \times \text{sen}\, AHT + \frac{c}{2} \times AE \times \text{sen}\, AEm}{AE \times \text{sen}\, AEG}$

$$= \frac{B.KL.\text{sen}\, KLB - \frac{c}{2}.KG.\text{sen}\, KGn - F.KI.\text{sen}\, KIF}{KG.\text{sen}\, KGE}$$

que espresa las condiciones del equilibrio; pero variará á medida que el quadrilátero mudare de situacion, quando dicho quadrilátero no fuere un paralelogramo.

467 Supongamos que el quadrilátero sea un paralelogramo: será $AE = KG$, $\text{sen}\, AEG = \text{sen}\, KGE$, $\text{sen}\, AHT = \text{sen}\, AEm = \text{sen}\, KGn = \text{sen}\, KIF = \text{sen}\, KLB$. Luego la equacion se reducirá á $T \times AH + \frac{c}{2} \times AE = B \times KL - \frac{c}{2} \times AE - F \times KI$, ó $B \times KL = T \times AH + C \times AE + F \times KI$, que discrepa de la que sacamos antes (462) en que aquella lleva mas que esta el término $C \times AE$ correspondiente al peso de las cadenas.

468 Aunque son muy distintos uno de otro los dos supuestos que hemos hecho para averiguar las condiciones en que estriva el equilibrio de la puente levadiza, dan no obstante dos equaciones que no se diferencian sino en un solo término, y es el menos importante de todos. En la práctica parece que se debe dar la preferencia á la fórmula $B \times KL = T \times AH + F \times KI + C \times AE$.

Una

Una vez determinadas, por qualquiera de los dos mé- Fig.
todos, las dimensiones de la puente levadiza, respecto de la madera y del hierro con que se ha de fabricar, se mantendrá indefectiblemente en equilibrio en todas las situaciones posibles, y por consiguiente el agente que le huviere de mover no tendrá que vencer á cada instante mas resistencia que la del rozamiento.

Antes de pasar á otro asunto, daremos aquí la descripcion de algunos instrumentos que se refieren á la palanca, y son de mucho uso en la sociedad.

De las Balanzas.

469 Las *Balanzas* son, como nadie lo ignora, una 183.
máquina que sirve para pesar géneros, y se compone de una palanca recta *AB*, llamada la *Cruz*, en cuyos estremos cuelgan por medio de cordones dos platillos *C* y *D* donde se pone lo que se quiere pesar. En medio de la palanca está el *Fiel* que es un ege *xy* perpendicular á su longitud, y cuyos estremos entran y se mueven con libertad en los ojos que hay en los dos brazos de la *Alcoba EM* que sostiene la máquina. Los estremos del ege no son de figura cilíndrica, están á manera de cuchillos mas ó menos romos, conforme hayan de servir las balanzas para pesar géneros mas ó menos pesados; la palanca descansa con el corte de dichos cuchillos en los ojos de la alcoba quedando con toda libertad para inclinarse al uno y otro lado; lleva una *Lengueta fg* que está dentro de la alcoba quando hay

Fig. equilibrio, y está orizontal la palanca; cuya lengueta desviándose á la derecha ó izquierda de la alcoba en su estremo superior, manifiesta no solamente ácia qué lado se ha inclinado la cruz, sino tambien las mas mínimas inclinaciones que puede padecer.

470 Se viene á los ojos que las balanzas son una palanca de la primera especie. Lo primero que se debe hacer es ponerlas en equilibrio, sin peso ninguno. Despues que en virtud de esta primera operacion se mantuviere la palanca en la situacion orizontal, las balanzas se hallarán en el mismo caso que si sus partes no tuvieran ninguna pesantez; y solo se deberá atender á los pesos que se han de poner en los platillos. Una vez conocidos los que se pusieren en el uno de ellos, se conocerán los que se pusieren en el otro.

471 Se han de hacer con mucho cuidado las balanzas para que salgan exactas. Desde luego es esencial que los dos brazos *EA*, *EB* sean exactamente iguales. Si despues de cumplida esta condicion, el un lado vence al otro estando los brazos armados con los platillos, se pondrán del lado mas debil pesos pequeños en bastante cantidad para hacer equilibrio, y mantener la cruz en la situacion orizontal. Estos pesos pequeños se han de considerar como parte de las mismas balanzas, y no como parte de los que se han de pesar.

472 Si los dos brazos *AE*, *BE* no fuesen iguales, el mas largo ayudaría al peso puesto de su lado. Porque supongamos que estando la palanca *AB* en equilibrio y en la

la situacion orizontal, se ponga en el platillo C un peso P, Fig.
y en el platillo D un cuerpo Q, de modo que haya equilibrio. Por estar en equilibrio los dos pesos, tendremos (440) $P : Q :: AE : BE$. Luego si AE fuese mayor que BE, será P mayor que Q. Por consiguiente, aunque los dos pesos sean iguales, el uno podrá mas que el otro, y parecerá de mayor peso. Estas balanzas se llaman *Balanzas falsas*; y pueden servir no obstante para determinar exâctamente el peso de alguna mercadería, y lo probaremos.

473 Sin indagar qual es el mas largo de los dos brazos de unas balanzas que malicio ser falsas, pongo 1.° en el uno de los platillos, en el platillo D por egemplo, el género Q que deseo pesar, y miro con cuidado el peso P que le pone en equilibrio. 2.° Traslado el género Q al platillo C, y miro tambien con cuidado el peso P' que le pone en equilibrio. Hecho esto, multiplico P por P', saco la raiz quadrada del producto, y será el valor cabal de Q. Porque el primer equilibrio dá (440) la equacion $Q \times AE = P \times EB$, el segundo dá $P' \times AE = Q \times EB$. Dividiendo la primera equacion por la segunda, saldrá $\frac{Q}{P'} = \frac{P}{Q}$, y por consiguiente $Q^2 = P \times P'$; luego $Q = \sqrt{(P \times P')}$.

474 Es menester poner el mayor cuidado en que estén quanto sea posible en una misma linea orizontal, el corte del cuchillo que hace oficios de ege, y los dos puntos A y B de los quales cuelgan los platillos. Porque si el 184.

Fig. punto de apoyo *E* está mas arriba ó mas abaxo que la ori-
184. zontal *AB*; por poco que esta línea esté inclinada al ori-
185. zonte, estará dividida en dos partes desiguales por la vertical *EM* tirada por el apoyo; y por consiguiente los pesos
184. que se equilibraren no serán iguales. En el primer caso, las balanzas se mueven con sobrada facilidad sobre el punto *E*; y entonces se llaman *Balanzas locas*; en el segundo caso,
185. caen con mucha dificultad, y se llaman *Balanzas sordas*. Esta última disposicion tiene menos inconvenientes que la primera, y sirve la lengueta para señalar la mas leve inclinacion ácia qualquiera de los dos lados.

De la Romana.

475 Sirve la *Romana* para pesar mercaderías de diferente peso por medio de un solo y mismo peso, apartándole mas ó menos del punto de apoyo. Compónese esta má-
186. quina de una palanca *AB* colgada de una asa *EK* que la divide en dos brazos *EA*, *EB* sumamente desiguales. Del brazo mas corto cuelga un platillo ó un garfio *C* cuyo destino es sostener los géneros que se quieren pesar; y se hace correr por medio de una argollita, á lo largo del brazo *EB*, el peso constante *P* que se ha de equilibrar con ellos. Vamos á declarar cómo se determinan los puntos de division del brazo *EB*, á los quales ha de corresponder el peso dado *P* para mantener en equilibrio diferentes pesos *Q* puestos en *C*.

476 Llamemos *G* el peso del brazo *EB* reconcentrado en su centro de gravedad *N*; *F*, el peso del brazo *EA* re-

reconcentrado en su centro de gravedad H; C, el peso del platillo ó garfio, que se supone obrar en la direccion de la vertical AC. Pónganse succesivamente en C diferentes pesos Q, Q', Q'', Q''' &c; y supongamos que para poner la palanca en la situacion orizontal, y hacer el equilibrio, hayamos de aplicar succesivamente el peso constante P en los puntos a, b, c, d &c. Las diferentes equaciones del equilibrio serán (453) Fig.

$$Q \cdot EA + F \cdot EH + C \cdot EA = P \cdot Ea + G \cdot EN,$$
$$Q' \cdot EA + F \cdot EH + C \cdot EA = P \cdot Eb + G \cdot EN,$$
$$Q'' \cdot EA + F \cdot EH + C \cdot EA = P \cdot Ec + G \cdot EN,$$
$$Q''' \cdot EA + F \cdot EH + C \cdot EA = P \cdot Ed + G \cdot EN.$$

Si restamos succesivamente la primera equacion de la segunda, la segunda de la tercera, la tercera de la quarta, &c. tendremos

$$(Q' - Q) \cdot EA = P \times ab, \text{ ó } ab = \frac{(Q'-Q) \cdot EA}{P}$$
$$(Q'' - Q') \cdot EA = P \times bc, \text{ ó } bc = \frac{(Q''-Q') \cdot EA}{P}$$
$$(Q''' - Q'') \cdot EA = P \times cd, \text{ ó } cd = \frac{(Q'''-Q'') \cdot EA}{P}.$$

477. De aquí se sigue 1.° que si los pesos Q, Q', Q'' &c. crecen en progresion arismética, de modo que sea $Q' - Q = Q'' - Q' = Q''' - Q'' =$ &c. todas las divisiones ab, bc, cd &c. serán iguales entre sí. 2.° Que si hacemos cada una de las partes ab, bc, &c. igual al brazo menor EA de la romana, tendremos $\frac{Q'-Q}{P} = 1$, ó $P = Q' - Q$, $\frac{Q''-Q'}{P} = 1$, ó $P = Q'' - Q'$ &c; quiero decir, que el contrapeso P será igual á la diferencia de la progresion arismética de los géneros Q, Q', Q'' &c.

Fig. 478 Si P tuviere yá un valor determinado, el primer término Q de la progresion arismética no podrá ser arbitrario; habrá de ser tal que se verifique esta equacion $Q.EA + F.EH + C.EA = P.Ea + G.EN$.

En la práctica, conviene poner primero la romana en equilibrio por sí sola, sin intervencion de los pesos P y Q. Esto se consigue, ó colgando del garfio C un peso pequeño, ó atando un peso pequeño al brazo EB, conforme sea de los dos el que prevalezca. Supongamos que prevalece el brazo EB, é incluyamos el pequeño peso añadido en el peso del garfio; tendremos en este caso $F \times EH + C \times EA = G \times EN$; luego $Q \times EA = P \times Ea$; luego si hacemos $Ea = EA$, tendremos (por ser $P = Q' - Q$), $Q = Q' - Q$, ó $Q' = 2Q$. Por consiguiente, el primer término de la progresion arismética será Q, y la razon será tambien Q. Por donde se echa de ver que si en este caso se señalan en el brazo mas largo EB partes iguales al brazo mas corto EA, se conseguirá hacer equilibrio con los pesos P, $2P$, $3P$ &c. por medio de un peso dado P aplicado á las diferentes divisiones.

479 Tambien se pueden subdividir las partes iguales ab, bc, cd &c. para contrapesar con el mismo peso P los pesos intermedios á los de la serie P, $2P$ &c. Sea un género $= P + \frac{m}{n} P$, siendo m y n números positivos, y m menor que n. Coloquemos este peso en C, y llamemos x la distancia que ha de haber entre el contrapeso P y el punto a. Resulta de la equacion $ab = \frac{(Q' - Q) . EA}{P}$, que en el caso pro-

propuesto será $x = \frac{\frac{m}{n}P \times EA}{P} = \frac{m}{n}EA = \frac{m}{n}ab$. Luego Fig.
á las fracciones del peso corresponden fracciones análogas de la parte ab. Lo propio sucede respecto de las partes bc, cd &c.

480 Tiene la romana la propiedad de que con un solo y mismo peso, se pueden contrapesar pesos muy grandes. A mas de esto, cansa menos los ojos de la alcoba que las balanzas; porque si con estas se quiere contrapesar un peso $4P$, cada uno de los dos platillos sostendrá un peso igual; y la presion que padecerán los ojos de la alcoba será $4P + 4P$, ó $8P$ (83); siendo así que en la romana donde el peso P aplicado á la quarta division del brazo EB, contrapesa el peso $4P$ puesto en el platillo C, la presion que padecen los ojos de la alcoba no es mas que $4P + P$ ó $5P$ (83). Pero tambien está espuesto á torcerse el brazo EB de la romana quando es algo largo; y esto es un inconveniente á que están menos espuestas las balanzas.

481 Es evidente que en vez de suponer constante el peso aplicado al brazo mas largo EB, y el otro variable, se podría hacer una romana en que este último peso fuese constante, y el otro variable. Esta romana estaría construida al reves de la primera; y se percibe, sin que nos detengamos en especificarlo, qué método se habria de seguir para dividirla.

De

Fig.

De la Romana Sueca ó Dinamarquesa.

187. 482 La Romana que así se llama, por ser muy usada en Suecia y Dinamarca, es una barra larga *AB* de hierro ó madera, que en el uno de sus estremos lleva una masa pesada *A*, y en el otro un garfio ó platillo *C* para sostener las mercaderias que se quieren pesar; pasa por dentro de una argolla *E* que la sostiene, y corre á lo largo de la palanca, hasta que haya equilibrio al uno y otro lado del punto *E*.

483 Imaginemos que el systema de la masa *A*, de la barra *AB*, y del platillo *C* no componen mas que un mismo peso *P* reconcentrado en su centro de gravedad *H*. Llamemos *Q* el peso del género que se quiere pesar. De la condicion del equilibrio sacaremos $P \times EH = Q \times EB$, ó $P(BH - BE) = Q \times BE$; de donde se saca $BE = \frac{P \times BH}{P + Q}$. Por consiguiente, en conociendo *P* y *BH*, será facil graduar la barra *BH* de modo que sus divisiones correspondan á los diferentes pesos *Q* que se hubieren de pesar.

Del Rozamiento en la Palanca.

484 En la palanca es muy poco el rozamiento. En los casos mas comunes para que sirve esta máquina, el movimiento de rotacion se hace sobre un filo que le facilita, y el rozamiento cuya direccion es tangente á las dos superficies, obra en el estremo de un brazo muy corto de palanca respecto al de la potencia. Por lo que, se puede dejar de aten-

atender á esta resistencia en la práctica donde no es menester una precision tan escrupulosa. Fig.

En las balanzas, que, segun hemos dicho, son una especie de palanca, y han de estar hechas con toda la exactitud posible, no es de despreciar el rozamiento. Para que no se ladee esta fuerza á favor del uno de los pesos que se han de pesar, es preciso que siendo bien iguales los dos brazos, el filo sobre el qual se hace el movimiento de rotacion, esté exactamente á iguales distancias de las direcciones de los pesos; porque si este punto de rotacion se acercase al uno de los dos pesos, el otro se hallaría con ventaja, y la llevaría tanto mayor, aun quando no se considerára mas que el rozamiento, quanto mayores fuesen los pesos, porque subiría mas de punto el rozamiento.

De las Poleas ó Garruchas.

485. La *Polea* es un círculo, ó por mejor decir, un 188.
cilindro poco grueso, en cuya superficie esterior hay una especie de garganta ó *carril* donde se introduce una soga ó maroma tirada de ambos lados por dos potencias *P* y *Q*. Perpendicularmente al centro de la polea la atraviesa un ege *C* cuyos estremos dán vuelta con libertad dentro de los bra- 189.
zos de una asa, ó *armas CI*.

La polea puede ser *mobil* ó *inmobil*, conforme sube con el peso, ó se mantiene en un mismo lugar, ó, en general, conforme muda ó no de sitio para superar la resistencia. Es, pues, la polea inmobil ó fija aquella en que la potencia, 188.
y el peso, ó el obstáculo que ha de vencer, están ambos 189.
apli-

Fig. aplicados en direcciones tangentes á la circunferencia de
190. la polea. La polea mobil es aquella en que el peso ó el
191. obstáculo está aplicado al centro, ó en una direccion que
192. pasa por el centro ó ege de la polea.

Quando se considera generalmente la polea, se repara que admite esta máquina dos especies de movimientos; en virtud del uno de estos dos movimientos, la maroma ó soga que pasa por el carrillo ó muesca de la polea, esto es que la abraza, puede mudar de lugar, sin que por esto mude de lugar el cuerpo de la polea; en virtud del otro puede mudar de situacion el cuerpo de la polea. Por esta razon pende de dos condiciones enteramente distintas el equilibrio en esta máquina: la primera consiste en que las tensiones de las dos partes de la maroma que abraza la polea, se destruyan mutuamente; para cuyo efecto han de ser iguales, sea la que fuere (427) la curvatura de la polea. La segunda condicion se infiere de la primera por el método siguiente.

486. De las tensiones de los dos cordones que abrazan la polea, resulta en el cuerpo de esta máquina un esfuerzo que se determina con tomar en las direcciones de los cordones, empezando desde su punto de concurso las par-
188. tes iguales *IA*, *IB*, y formando el paralelogramo *IADB*
189. cuya diagonal *ID* representará el esfuerzo que aguanta el
190. cuerpo de la polea, suponiendo que represente *IA* la tension del cordon *OP* (fig. 188 y 189), ú *OG* (fig. 190). Pero por razon de las tangentes *IR*, *IO*, y de las lineas igua-

iguales *IB*, *IA*, es facil percibir que *ID* prolongada pasa Fig.
por el centro *C* de la polea. Luego si el cuerpo de la polea no estuviere firmemente asegurado, no será posible contrarrestar *ID*, á no ser que el obstáculo, sea el que fuere, que ha de impedir el movimiento del cuerpo de la polea, esté en algun punto de la linea *IC* que vá desde el centro al punto de concurso de las dos cuerdas que abrazan la polea. Por lo que, si ha de dar vueltas la polea dentro de unas armas *CG* aseguradas en un punto esterior *G*, y si estas armas 189.
pudieren dár vueltas al rededor de *G*, no habrá equilibrio sino en el caso de estar las armas dirigidas ácia *CI*.

En el caso de ser mobil la polea, abrazándola una maroma afianzada en el punto *G*, no habrá equilibrio sino quan- 190.
do el esfuerzo aplicado al centro *C*, ó á las armas clavadas en el mismo centro, dividiere en dos partes iguales el ángulo de los cordones *OG*, *RQ*, y fuese dicho esfuerzo á la tension de cada uno de los dos cordones *OG*, *RQ* :: *ID* : *IA* : *IB*.

487 Esto supuesto, será facil hallar la razon que ha 190.
de haber entre las tensiones de cada uno de los dos cordones que abrazan la polea, y el esfuerzo que resulta contra el cuerpo de la polea, y por consiguiente entre el esfuerzo de que es capaz la polea mobil. Como representa *IA*, ó su igual *IB*, la tension de cada cordon, representa *ID* el esfuerzo que aguanta el cuerpo de la polea. Pero en el triángulo *IAD*, *IA* : *ID* :: sen *IDA* : sen *IAD*, ó :: sen *CIQ*: sen *OAD* ó sen *GIQ*; se puede, pues, decir en general,

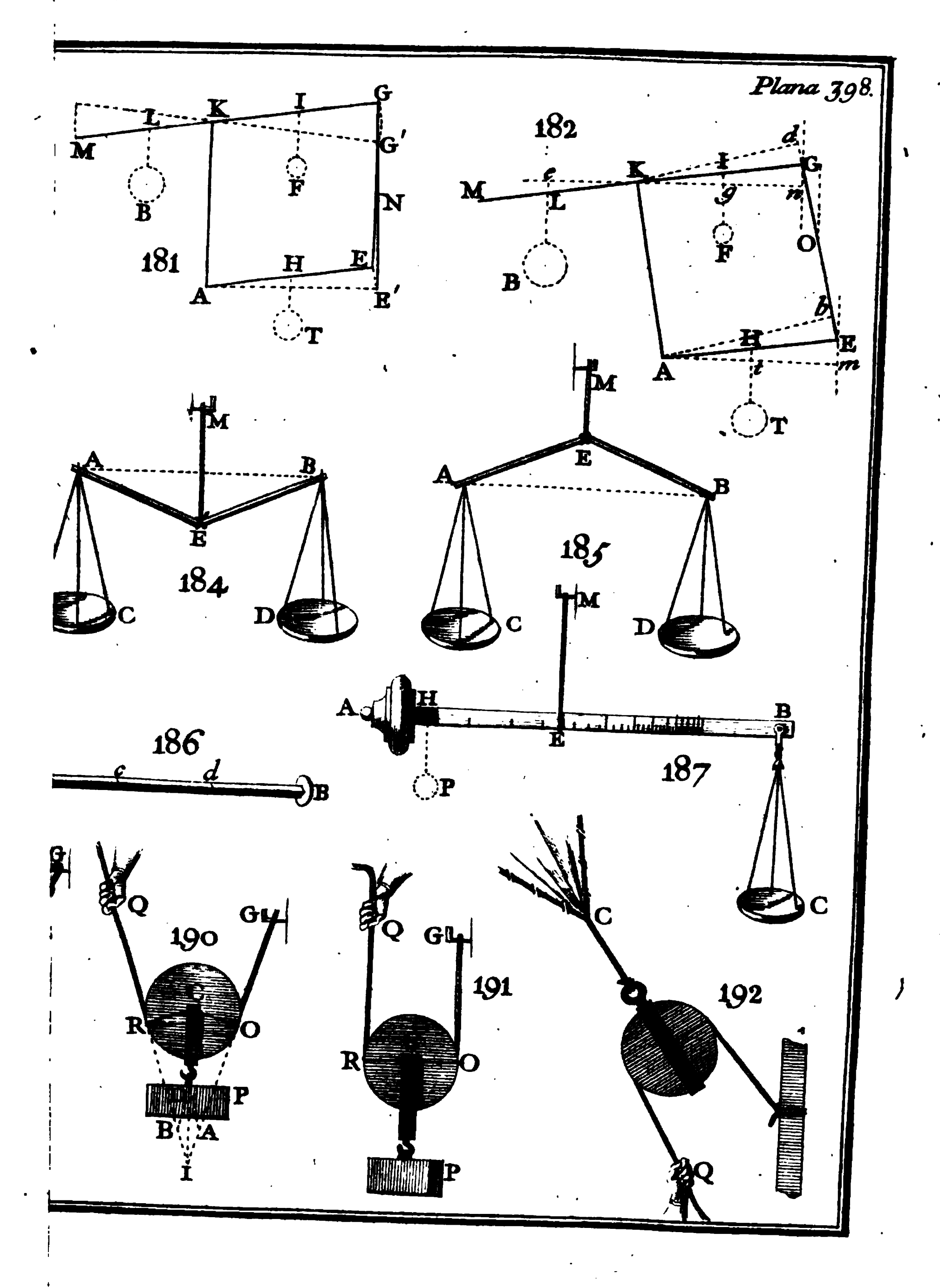
que

Fig. que *quando se verifica el equilibrio por medio de la polea simple, fija ó mobil* 1.° *las tensiones de los dos cordones que abrazan la polea, ó las potencias aplicadas á dichos dos cordones son iguales.* 2.° *cada una de estas potencias es al esfuerzo que aguanta el centro de la polea, como el seno de la mitad del ángulo que forman los dos cordones, es al seno del mismo ángulo entero.*

188. Por esto no tiene la potencia *Q* otra ventaja en la po-
189. lea fija sino la de poder mudar á arbitrio la direccion de su
190. conato. Pero en la polea mobil lleva la potencia *Q* dos ven-
191. tajas, la de poder mudar su direccion, y la de aumentar el
192. efecto de su impulso. Pero es de observar que al paso que muda su direccion, varía la fuerza que hace en el centro: de suerte que hay una direccion en que esta fuerza es la mayor posible, y esto sucede quando los dos cordones *OG*, *RQ* son paralelos, conforme vamos á probarlo.

190. 488 Si se tiran los radios *OC*, *CR*, y la subtensa *OR*, tendrá el triángulo *OCR* sus lados perpendiculares á los del triángulo *BID*, y serán por consiguiente semejantes los dos triángulos, tendremos, pues, $IB : ID :: CR : OR$, esto es, $Q : P :: CR : OR$; luego en general, *la tension del uno de los cordones es á la fuerza que aguanta el centro, como el radio de la polea, es á la subtensa del arco que abraza la maroma.*

Pero es evidente que esta última razon es la mayor posible, y es la de 1 á 2 quando son paralelos los cordones; luego *en la polea mobil es la potencia la menor posible,* quan-


Plana 398.
181
182
184
185
186
187
190
191
192
M L K I G G′ N B F H E A E′ T
M e L K I g G d n O B F A H E b m t T
A B E M C D
A E B M C D
A H E B P C
c d B
G Q G R O P B A I
Q G R O P
C Q

quando son paralelos los cordones; en cuyo caso es la mitad del peso que sostiene el centro de la polea. Fig.

489 Luego si sostuviere la potencia Q un peso P por medio de muchas poleas móbiles, abrazadas cada una por un cordon, que tenga el un estremo asegurado en un punto fijo, y el otro en las armas de la polea inmediata, habrá entre la potencia, y el peso la misma razon que entre el producto de los radios de todas las poleas móbiles, y el producto de las subtensas de los arcos que los cordones abrazaren. 193.

Porque si llamamos N y M las cargas de los centros de las dos poleas N y M, que son al mismo tiempo las tensiones de los dos cordones asegurados en los centros de las poleas N y M, y llamamos r, r', r'' los radios, y s, s', s'' las subtensas de las poleas N, M, L, tendremos (488) $Q : N :: r : s$; $N : M :: r' : s'$; $M : L$ ó $P :: r'' : s''$; luego multiplicando por orden, y omitiendo los factores comunes á los términos de la primera razon, saldrá $Q : P :: rr'r'' : ss's''$. Y si fuesen paralelos los cordones, en cuyo caso $s = 2r$, $s' = 2r'$, $s'' = 2r''$, tendremos $Q : P :: rr'r'' : 2r \times 2r' \times 2r'' :: 1 : 2 \times 2 \times 2$; quiero decir, que la potencia será al peso como la unidad al número 2 levantado á una potencia espresada por el número de las poleas móbiles; por egemplo, con tres poleas, sostendrá la potencia Q ocho veces su valor.

490 Pero no es esta colocacion de las poleas la mas acomodada; se colocan mas comunmente, conforme se vé en las figuras que se citan y representan muchas poleas, las

Fig. unas fijas y las otras móbiles, qué abraza una misma maroma.
194. Para las poleas fijas sirven unas mismas armas, y en otras ar-
195. mas están solas las poleas móbiles. Unas veces, en las figu-
196. ras 194, 195, 196, 197, están los centros de las po-
197. leas en distintos puntos de las armas, y otras veces están
198. todos en un mismo ege, como en la figura 198. Llámanse
199. se estas poleas *Tróculas*.

De qualquiera modo que varíen estas disposiciones particulares, siempre se podrá hallar la razon entre la potencia, y el peso, por este principio. ***La potencia es al peso, como el radio ó seno de 90°, es á la suma de los senos de los ángulos que forma con la orizontal cado uno de los cordones que rematan en las tróculas móbiles.***

194. Porque si para representar la tension de los cordones
195. tomamos en cada uno de ellos las partes iguales ***im***, ***np*** &c. y sobre cada una de estas lineas como diagonal, formamos un paralelogramo que tenga dos lados verticales, y los otros dos orizontales; en vez de considerar el peso *P* como sostenido por las tensiones inmediatas de los cordones, le podremos considerar como sostenido por el concurso de las fuerzas orizontales ***ik***, ***no*** &c. y de las fuerzas verticales ***il***, ***nq*** &c. Pero como las dos primeras son perpendiculares á la direccion de la fuerza del peso, de ningun modo contribuyen para contrarrestar esta fuerza; y en el equilibrio se destruyen mutuamente; luego no está sostenido el peso *P*, sino por la derivada, esto es, por la suma de las fuerzas verticales ***il***, ***nq*** &c. Pero en los triángulos rectángulos ***ilm***, ***nqp*** &c.

te-

tenemos $im : il :: 1 : \text{sen } iml$; np ó $im : nq :: 1 : \text{sen } npq$, y Fig.
así de los demás cordones; luego $il = im \text{ sen } iml$; $nq = im \text{ sen } npq$; luego por fin $Q : P :: im : im \text{ sen } iml + im \text{ sen } npq +$ &c. ó $:: 1 : \text{sen } iml + \text{sen } npq +$ &c.

Si fuesen paralelos los cordones, y por consiguiente verticales, serían rectos los ángulos iml, npq &c. y el seno de cada uno de ellos sería igual al radio 1. Luego en este caso la potencia será al peso como 1 es á la suma de tantas unidades quantos cordones remataren en las tróculas móbiles. De donde se infiere, que *si el uno de los estremos de la* 194.
maroma está asegurado en las tróculas fijas, la potencia será 196.
al peso, como la unidad al duplo del número de las poleas de las tróculas móbiles. Y si el estremo de la maroma estuviere 195.
afianzado en las tróculas móbiles, la potencia será al peso, co- 197.
mo la unidad al duplo del número de las poleas de las tróculas móbiles, añadiéndole una unidad.

491 La proposicion general que acabamos de probar, se verifica estén ó no los cordones en un mismo plano. Y si el obstáculo que se ha de mover por medio de las tróculas no fuese un peso; esto es, si la direccion del esfuerzo total de la trócula no fuese vertical, no por esto dejaría de verificarse la proposicion, con substituir en lugar de los ángulos que se suponia que los cordones hacian con el plano orizontal, los que forman con el plano perpendicular al conato total de la trócula. Por egemplo la potencia Q es 199.
al esfuerzo que se hace en G, como el radio es á la suma de los senos de los ángulos que cada uno de los cordones

Fig. que rematan en la trócula *EH* forman con un plano perpendicular á *HG*.

492 Tambien se puede inferir de lo que acabamos de declarar la razon que ha de haber entre la potencia y el peso, quando se hace uso de muchas tróculas compuestas cada una
199. de poleas fijas y móbiles. Porque suponiendo paralelos los cordones, la potencia *Q* es á la fuerza que se hace en la direccion *BC* (490) :: 1 : 5; pero esta última fuerza hace las veces de potencia respecto de la máquina *BA*; es, pues, respecto del peso *P* :: 1 : 4; luego, multiplicando por orden, la potencia *Q* es al peso *P* :: 1 : 20; y por consiguiente se podria con una fuerza de 50 libras, por egemplo, sostener un peso de 1000 libras.

493 En lo que acabamos de decir hemos prescindido de la pesantez de las poleas, armas, &c. del rozamiento, y de la rigidez de las maromas, á cuyas circunstancias atenderemos en adelante. Por lo que mira al peso de las partes móbiles que ha de sostener la potencia, el modo de apreciarle en el caso del equilibrio, consiste en
196. incluir su valor total en el del peso *P*, quando la accion
197. total de su peso coincide con la de *P*; pero si el peso de la
199. máquina *CF* no se dirige por la misma linea *BC*, que sería la direccion del esfuerzo de dicha máquina, si no fuera pesada; en este caso no estará *BC* en esta última direccion, sí en la direccion de la derivada del peso de la máquina, y de la fuerza que haría si no fuese pesada; pero como es de muy corta consideracion este punto, escusaremos indagar

la

la razon cabal que hay entre la potencia y el peso, quando se usan las poleas del modo que las representa la figura. Fig.

494 Por lo que mira al movimiento en la polea, solo consideraremos aquí el que comunica al peso *P*, quando son paralelos los cordones. Es evidente que en la polea fija 200.
y simple, ha de caminar el peso con la misma velocidad que la potencia *Q*; y en la polea simple y mobil es la ve- 201.
locidad del peso la mitad de la velocidad con que camina la potencia. En las tróculas, como los cordones son paralelos, la velocidad del peso es á la de la potencia, como la potencia es al peso en el caso del equilibrio. Porque es evi- 196.
dente que si las tróculas móbiles han subido, pongo por ca- &c.
so un pie, cada uno de los cordones que en ellas rematan se habrá acortado un pie; luego el cordon á que está aplicada la potencia, ha tenido que alargarse tantos pies, quantos son los cordones que rematan en las tróculas móbiles.

495 Quando un peso *Q* que baja á impulsos de su 202.
pesantez se lleva consigo por medio de la polea de retorno *T* otro peso *P* atado á una polea mobil, le comunica cada instante cierta cantidad de movimiento. El que quisiere averiguar qual ha de ser el peso *P*, á fin de que la cantidad de movimiento comunicada sea la mayor posible, esto es, en qué caso la fuerza *Q* causará el mayor efecto posible, practicará lo siguiente.

Sea *p* la velocidad que la pesantez comunica á un cuerpo libre en un segundo de tiempo; pdt será la que le comunica en el instante dt. Sea dv la velocidad que adqui-

 ri-

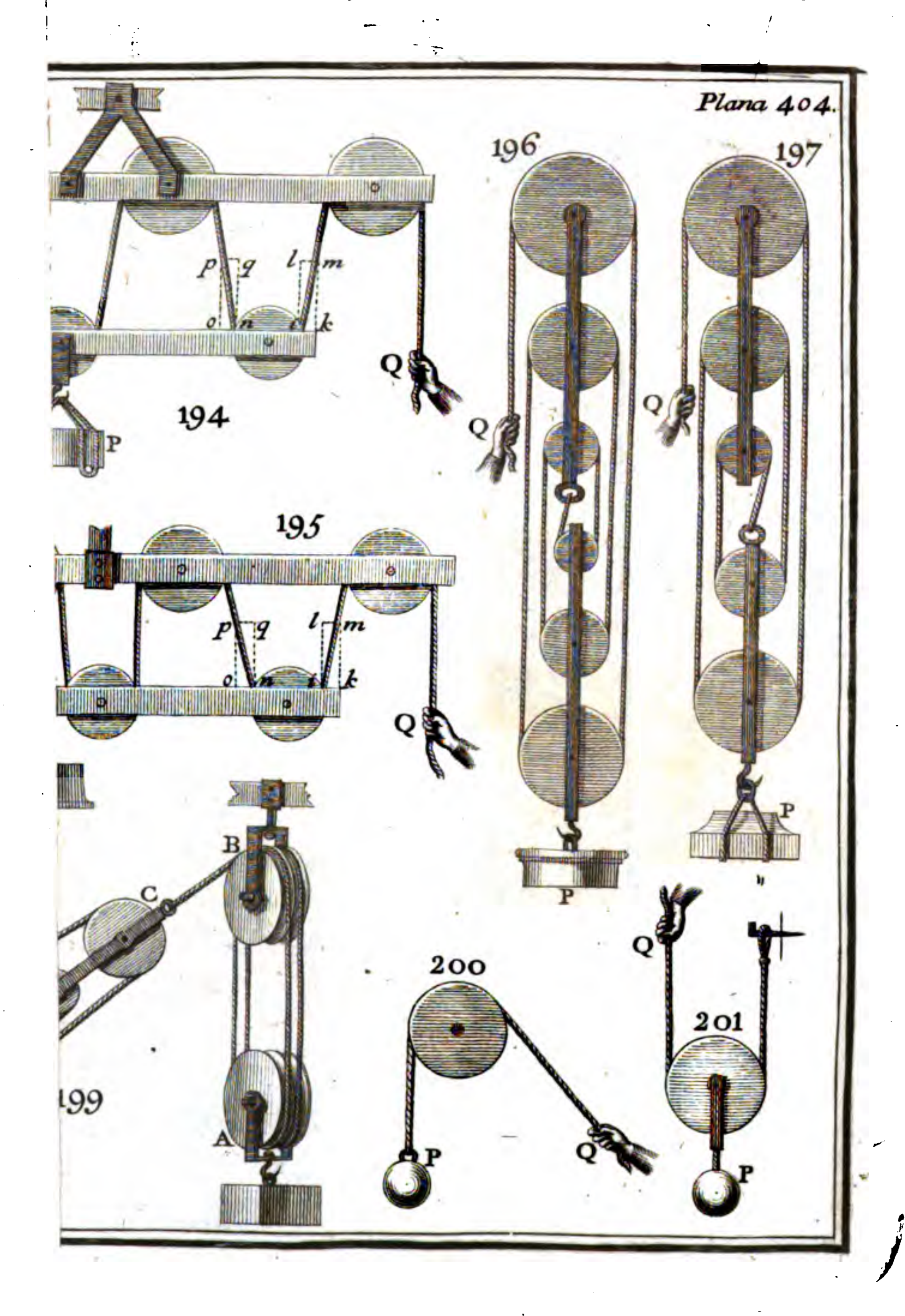
Fig. rirá en realidad el cuerpo P; $2dv$ será la que adquirirá Q (494). Hemos, pues, de imaginar (174) que la velocidad pdt, que hubiera adquirido Q si hubiese estado libre, se compone de la velocidad $2dv$ que conserva, y de la velocidad $pdt - 2dv$ que ha de perder.

Hemos de imaginar tambien que la velocidad pdt, que P hubiera adquirido si hubiese estado libre, se compone de la velocidad $-dv$ que está para adquirir en direccion contraria á la velocidad pdt que habia de adquirir, y de la velocidad $pdt + dv$ que quedará destruida. Pero como las velocidades $pdt - 2dv$, y $pdt + dv$ de Q y P han de quedar destruidas, es preciso (488) que $pQdt - 2Qdv : pPdt + Pdv :: 1 : 2$; luego $2pQdt - 4Qdv = pPdt + Pdv$, de donde se saca $dv = \frac{2pQ - pP}{4Q + P} dt$. Luego la cantidad de movimiento de P será $\frac{2pPQ - pP^2}{4Q + P} dt$; y yá que ha de ser un *máximo*, es preciso que su diferencial, sacándola en el supuesto de no haber mas variable que P, sea cero; tendremos, pues, $d\left[\frac{2pPQ - pP^2}{4Q + P} dt\right] = 0$, ó $8Q^2 - 8PQ - P^2 = 0$, de donde se saca $P = Q(-4 + \sqrt{24})$.

Del Rozamiento en las Poleas.

203. 496 Sea *OMCD* una polea colgada por medio de sus armas de un punto fijo E; el círculo pequeño A es su ege sobre el qual dá vueltas con libertad, ó le arrastra la polea haciéndole dar vueltas sobre dos apoyos. Sean P y Q dos pesos iguales colgados de los estremos de una cuerda *PDCMQ* que abraza la polea. Supongamos que para al-

te-


196
197
p
q
l
m
o
n
i
k
Q
194
P
195
Q
B
C
199
A
200
P
Q
201
P

terar el equilibrio, ó contrarrestar el rozamiento, se le haya de añadir al uno de los pesos, al peso P por egemplo, otro peso x. Fig.

Sentado esto, es evidente que antes de añadir el peso x, la presion vertical que padece el centro A, ó la superficie convexa del ege, era igual á $P + Q$, ó á $2P$; será, pues, la presion, despues de añadido el peso x, $= 2P + x$; luego si representamos por n la razon entre el rozamiento y la presion, será en este caso el rozamiento $n(2P + x)$. Obra esta fuerza en una direccion tangente á la superficie convexa del ege, siendo así que el peso cuyo destino es vencerla, obra en una direccion tangente á la superficie convexa de la polea; luego si llamamos a el radio del ege; b, el radio AC de la polea, tendremos por la naturaleza del equilibrio (444) $x \times b = n(2P + x) \times a$, de donde saldrá $x = \frac{2naP}{b - na}$.

Supongamos, por egemplo, que cada uno de los pesos P y Q sea de 100 libras, que sea el rozamiento el $\frac{1}{5}$ de la presion, y el radio del ege la sexta parte del de la polea; esto es, $P = 100$ libras, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; será $x = 6\frac{26}{29}$ libras. Se necesitaría, pues, para vencer el rozamiento un peso de cerca de 7 libras.

497 Representa la figura un systema de quatro poleas iguales A, B, C, D que sostienen un peso P. Está colgado este peso de las armas de la polea A, y esta polea está sostenida por una cuerda cuya parte 1 está asegurada en el punto fijo E, y la parte 2 en las armas de la 264.

Fig. polea *B*; la polea *B* está sostenida por una cuerda cuya parte 3 está asegurada en *F*, y la parte 4 en las armas de la polea *C* &c. Todos los cordones 1, 2, 3, 4 &c. son paralelos entre sí, y verticales, y son iguales todos los eges de las poleas.

Sentado esto, en el simple estado de equilibrio, y prescindiendo del rozamiento, á cada uno de los cordones 1 y 2 le mantiene tirante una fuerza que es la mitad del peso *P*; á cada uno de los cordones 3 y 4 una fuerza que es la mitad de la tension de cada uno de los cordones 1 y 2, y por consiguiente la quarta parte del peso *P* &c; de suerte que la tension del último cordon 8, ó la potencia *Q* es la décima sexta parte del peso *P*. Pero quando se trata de vencer el rozamiento, crecen las tensiones de los cordones, y se determinan del modo siguiente.

Llamaremos en general n la razon entre el rozamiento y la presion; a, el radio de cada ege; b, el radio de cada polea.

1.° La presion que aguanta la superficie del ege de la polea *A*, en virtud del peso *P*, es *P*. Sea x la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 2 para vencer el rozamiento, será $n(P+x)$ la espresion de este rozamiento. Luego discurriendo como antes (496) tendremos $bx = n(P+x)a$, de donde sacaremos $x = \frac{naP}{b-na}$. Por consiguiente si llamamos X la tension total del cordon 2, tendremos $X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b-na}$.

2.° Si no hubiese rozamiento en el ege de la polea *B*,

es

es evidente que á cada uno de los dos cordones 3 y 4 le tendría tirante una fuerza igual á $\frac{X}{2}$; de modo que resultaría contra el ege de la misma polea una presion igual á X. Sea y la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 4 para vencer el rozamiento de la polea B, la espresion de este rozamiento será $n(X+y)$, y tendremos $by = n(X+y)a$, de donde sacaremos $y = \frac{naX}{b-na}$. Por consiguiente, si llamamos Y la tension total del cordon 4, tendremos $Y = \frac{X}{2} + \frac{naX}{b-na}$. Fig.

3.° Discurriendo del mismo modo acerca de la polea C, y llamando z la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 6 para contrarrestar el rozamiento, Z la tension total del mismo cordon, tendremos $z = \frac{naY}{b-na}$, $Z = \frac{Y}{2} + \frac{naY}{b-na}$.

4.° Si llamamos v la fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 8 para vencer el rozamiento de la polea D, V la tension total del mismo cordon, ó la potencia Q, tendremos $v = \frac{naZ}{b-na}$, $V = \frac{Z}{2} + \frac{naZ}{b-na}$.

Es tan manifiesta la ley en fuerza de la qual se originan las unas de las otras las tensiones X, Y, Z, V, que no hay dificultad alguna para calcular estas cantidades, sea el que fuere el número de las poleas.

Para hacer alguna aplicacion de estas fórmulas, supongamos que sea de 800 libras el peso P, el rozamiento el $\frac{1}{5}$ de la presion, y el radio del ege $\frac{1}{6}$ del de la polea; esto es, $P = 800$ lib, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{na}{b-na} = \frac{1}{29}$; tendremos $X = 427\frac{17}{29}$ lib; $Y = 228\frac{452}{841}$ lib; $Z = 122\frac{5642}{24389}$ lib; $V = 65\frac{202785}{707281}$ lib.

Fig. Será, pues, de 65 libras, y un poco mas la potencia que se deberá aplicar en Q por razon del rozamiento, sin cuya resistencia hubiera bastado una fuerza de 50 libras.

498 Consideraremos otro caso acerca de las poleas, y supondremos dos garruchas, compuestas de dos poleas
205. cada una, la una fija y asegurada en E, la otra mobil que sostiene un peso P. Supongamos iguales entre sí todas las poleas; que lo sean tambien los eges que atraviesan cada par de poleas, y finalmente que abrace las poleas una misma cuerda, que tiene el un estremo atado en D á las armas de la garrucha superior, y del otro estremo tira una potencia Q.

Sean 1 y 2 los cordones que abrazan la polea K, 2 y 3 los cordones que abrazan la polea F &c. Representará n, como antes, la razon del rozamiento á la presion, a los radios de cada ege, y b los radios de cada polea.

Sentado esto, en el simple estado del equilibrio, cada uno de los cordones 1, 2, 3, 4, 5 se mantiene tirante por la accion de una fuerza igual á la quarta parte del peso P. Sea x la fuerza que se ha de añadir á la tension del cordon 2 para vencer el rozamiento que obra contra el ege de la polea K; X la tension total del mismo cordon 2; hallaremos por el mismo camino que antes $bx = n(\frac{P}{2} + x)a$, de donde sacaremos $x = \frac{\frac{naP}{2}}{b - na}$, y por consiguiente $X = \frac{P}{4} + \frac{\frac{naP}{2}}{b - na}$.

Sea

Sea y la fuerza que se la ha de añadir á la tension del cordon 3 para superar el rozamiento de la polea F; Y la tension total del mismo cordon, tendremos $y = \frac{2naX}{b-na}$, $Y = X + \frac{2naX}{b-na}$. Fig.

Sea z la fuerza que es preciso añadir á la tirantez del cordon 4 para vencer el rozamiento de la polea G, Z la tension total del mismo cordon, tendremos $z = \frac{2naY}{b-na}$, $Z = Y + \frac{2naY}{b-na}$.

Sea finalmente v la fuerza que se la ha de añadir á la tension del cordon 5 para sobrepujar el rozamiento de la polea C, y V la tension total del cordon 5, ó la potencia Q, tendremos $v = \frac{2naZ}{b-na}$, $V = Z + \frac{2naZ}{b-na}$.

Para aplicar estas fórmulas á un egemplo, supongamos que sea el peso P de 800 libras; el rozamiento la quarta parte de la presion, y los radios de las poleas sextuplos de los radios de los eges; esto es, $P = 800$ libras, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$, $\frac{na}{b-na} = \frac{1}{23}$; resultará $X = 217\frac{9}{23}$ lib; $Y = 236\frac{156}{529}$ lib; $Z = 256\frac{10248}{12167}$ lib; $V = 279\frac{49361}{279841}$. Pide, pues, el rozamiento una fuerza de 279 libras, quando si no fuera por esta resistencia hubiera bastado una de 200 libras.

En todos los demás casos de las poleas se valuará del mismo modo, con poca diferencia, el rozamiento.

Del Torno.

499 Llamamos *Torno*, en general, una rueda atravesada perpendicularmente por un cilindro cuyos estremos 206.

des-

Fig. descansan sobre dos apoyos *C*, *C*. Una potencia *Q* aplicada en una direccion tangente á la circunferencia de la rueda, se lleva tras sí dicha circunferencia, y el cilindro que está sólidamente unido con ella, y obligándoles á dár vueltas al rededor del ege del cilindro, es causa de que se vayan enroscando succesivamente al rededor del cilindro las diferentes partes de la maroma *DP*, á la qual está atado el peso *P* que se quiere levantar ó arrimar al cilindro.

206. En algunas ocasiones no se hace uso de rueda alguna
208. para hacer que dé vueltas el cilindro; se le plantan perpen-
209. dicularmente á su ege unas barras *E*, *E*, á las quales se apli-
210. ca la potencia, y produce el mismo efecto que la rueda. En otras ocasiones lleva el cilindro en sus dos estremos dos ci-
207. gueñas *Q*, *Q*, á las quales se aplica para el mismo fin la potencia ó fuerza motriz. Quando el ege del cilindro está en situacion vertical, la máquina de que estamos hablando se llama *Argue* ó *Cabestante*.

209. 500 Pero, en general, sea la que fuere la disposicion
210. de esta máquina, se echa de ver que la accion de la potencia, y la del peso ú obstáculo que ha de vencer, no obran en un mismo plano, sino en planos paralelos, ó que lo son con muy corta diferencia. La accion de la potencia causa dos efectos, el uno obra contra el peso mismo, y el otro contra los apoyos: veamos cómo se producen estos dos efectos en el caso del equilibrio.

206. Reduzcamos toda la máquina representada en la figu-
211. ra 206, á lo que se vé en la figura 211; quiero decir

que

que se reduzca todo el cilindro á su ege *CC*; representemos Fig.
por *AMN* el plano de la rueda, y por *BDL* la seccion del cilindro por un plano paralelo á *AMN*, y que pase por el cordon *DP*.

Despues de tirado el radio *EA* al punto *A* donde la potencia *Q* obra en la rueda, concibamos que por *CC* y *EA* pase un plano *CEA*, que encuentra *BDL* en la direccion *IB*, que será indispensablemente paralela á *AE*. Tiremos *AB*, y concibamos que por esta linea y la direccion *AQ* de la potencia, pase un plano *QAR* que encontrará el ege *CC* en algun punto *R*. Finalmente tírense por los puntos *B* y *R* las *BF* y *RG* paralelas á *AQ*.

Sentado esto, podemos resolver la fuerza *Q* (88) en otras dos fuerzas *F* y *G* cuyas direcciones sean *BF* y *RG*: y como esta última pasa por el ege mismo del cilindro, no puede causar movimiento alguno de rotacion al rededor del mismo ege, y por consiguiente no puede contribuir para sostener el peso *P*; la consumirán toda los apoyos. No hay, pues, mas fuerza que *F* para hacer equilibrio con el peso *P*. Pero 1.° la direccion de esta fuerza está en el mismo plano *BDL* en que obra la accion de dicho peso. 2.° Por ser las dos lineas *BF* y *BI* paralelas á las dos rectas *AQ*, *AE* que forman una con otra un ángulo recto, será *BF* perpendicular á *BI*, ó tangente de la circunferencia *BDL*. Podemos, pues, considerar *BID* como una palanca *angular*, cuyo punto de apoyo está en *I*; y como las distancias *BI*, *ID* que hay entre las direcciones de las dos potencias *F* y *P*, y dicho apo-

Fig. apoyo son iguales, han de ser tambien iguales las dos potencias; tenemos, pues, $F = P$; busquemos ahora qué razon hay entre F y Q.

En virtud de lo dicho (85) tenemos $Q : F :: BR : AR$; pero los triángulos semejantes RBI, RAE dán $BR : AR :: BI : AE$; luego $Q : F :: BI : AE$, ó (porque $F = P$) $Q : P :: BI : AE$; quiero decir, *que en el torno la potencia es al peso como el radio del cilindro es al radio de la rueda.*

212. 501 Si el peso P estuviese atado á un punto B del plano de la rueda, de modo que la perpendicular IB á su direccion fuese igual al radio del cilindro, podriamos considerar AIB como una palanca angular cuyo punto de apoyo estaría en el centro I; y para que hubiese equilibrio (438) se habria de verificar esta proporcion $Q : P :: BI : AI$; quiero decir, que habria entre la potencia y el peso la misma razon que antes. Luego *la accion de la potencia se comunica al peso, en el torno, como si estuviesen en un mismo plano el peso y la potencia.*

211. 502 Por lo que mira á la carga de cada uno de los apoyos, no es siempre una misma: varía, segun varía la distancia del plano BLD al plano de la rueda. Para determinarla, resolveremos la potencia Q (considerándola como aplicada en E paralelamente á AQ) en dos fuerzas paralelas á AQ, y que pasen por C y C (88). Resolveremos igualmente el peso P (considerándole como aplicado en I) en dos fuerzas paralelas á PD, y que pasen por C y C. Mediante esto, estará impelido cada apoyo de dos fuerzas

zas cuyas direcciones y valores serán conocidos. Será, pues, Fig.
facil reducir estas dos fuerzas, respecto de cada apoyo, á sola una cuya direccion y valor sean conocidos.

Fúndase este método para hallar la carga de los dos apoyos, en que las dos fuerzas *F* y *P* se reducen á sola una que obra en *I*: si imaginamos esta fuerza resuelta en dos fuerzas paralelas á *F* y *P*, y aplicadas en *I*, no tendrán estas otros valores que *F* y *P*. Luego 1.° podemos considerar *P* como aplicado en *I*. 2.° la fuerza *F*, considerándola como aplicada en *I*, y la fuerza *G* aplicada en *R*, no pueden menos de tener por derivada *Q*, pues la fuerza *Q* es su generatriz, conforme vimos arriba; á mas de esto, esta derivada pasa por *E*, pues *RI* : *RE* :: *RB* : *RA* :: *Q* : *F* (85).

503 Si la potencia en vez de obrar en una direccion tangente de la rueda, obrase por medio de los brazos *E*, *E*, y perpendicularmente á su longitud, la razon de la potencia al peso sería siempre la misma que antes, substituyendo en lugar de estas palabras *el radio de la rueda*, estotras: *la longitud de los brazos*, contándola desde el ege del cilindro. Pero si no obrase la potencia perpendicularmente al brazo *IE*, en lugar de este brazo se debería tomar la perpendicular *IR* tirada á la direccion de la potencia; de suerte que la potencia sería al peso, como el radio del cilindro á *IR*. 209. 210. 209.

504 Ya que *Q* : *P* :: *IB* : *AE*, será $Q \times AE = P \times IB$; quiero decir que el momento de la potencia es igual al momento del peso, contando estos momentos desde el ege *CC*. 211.

Lue-

Fig. Luego si obran á un tiempo muchas potencias aplicadas á diferentes brazos ; será preciso que la suma de los momentos de estas potencias , sea igual al momento del peso.

505 Si la maroma con que está atado el peso, ó que le comunica al obstáculo la accion de la potencia , en vez de enroscarse en un cilindro, se enroscára en una superficie cónica, ó en general en la de un sólido cuyos diámetros variasen, variaría tambien continuamente la razon entre la potencia, y el peso; y recíprocamente, si la potencia cuya accion se ha de comunicar por medio de una máquina parecida al torno , varía continuamente , y ha de producir no obstante constantemente el mismo efecto, se ha de procurar para conseguirlo, que esté aplicada á radios tanto mas largos , quanto mas disminuyere.

506 Parece , pues , quando no se considera mas que el equilibrio, que se puede disminuir á arbitrio la razon entre la potencia y el peso , y vencer con un peso por pequeño que sea , otro peso qualquiera por medio del torno y de las máquinas que á él se refieren. Pero quando se considera el movimiento, y se atiende, como es preciso, á la naturaleza de los agentes que obran , no se puede aumentar á arbitrio el efecto : no es arbitraria la razon entre el radio del cilindro , y el radio de la rueda: hay una de la qual pende el mayor efecto posible.

209. Supongamos , por egemplo , que el motor aplicado al brazo *E* intente moverse con una velocidad *V* , y que la fuerza de que es capaz sea *MV* , esto es , equivalente á la

de

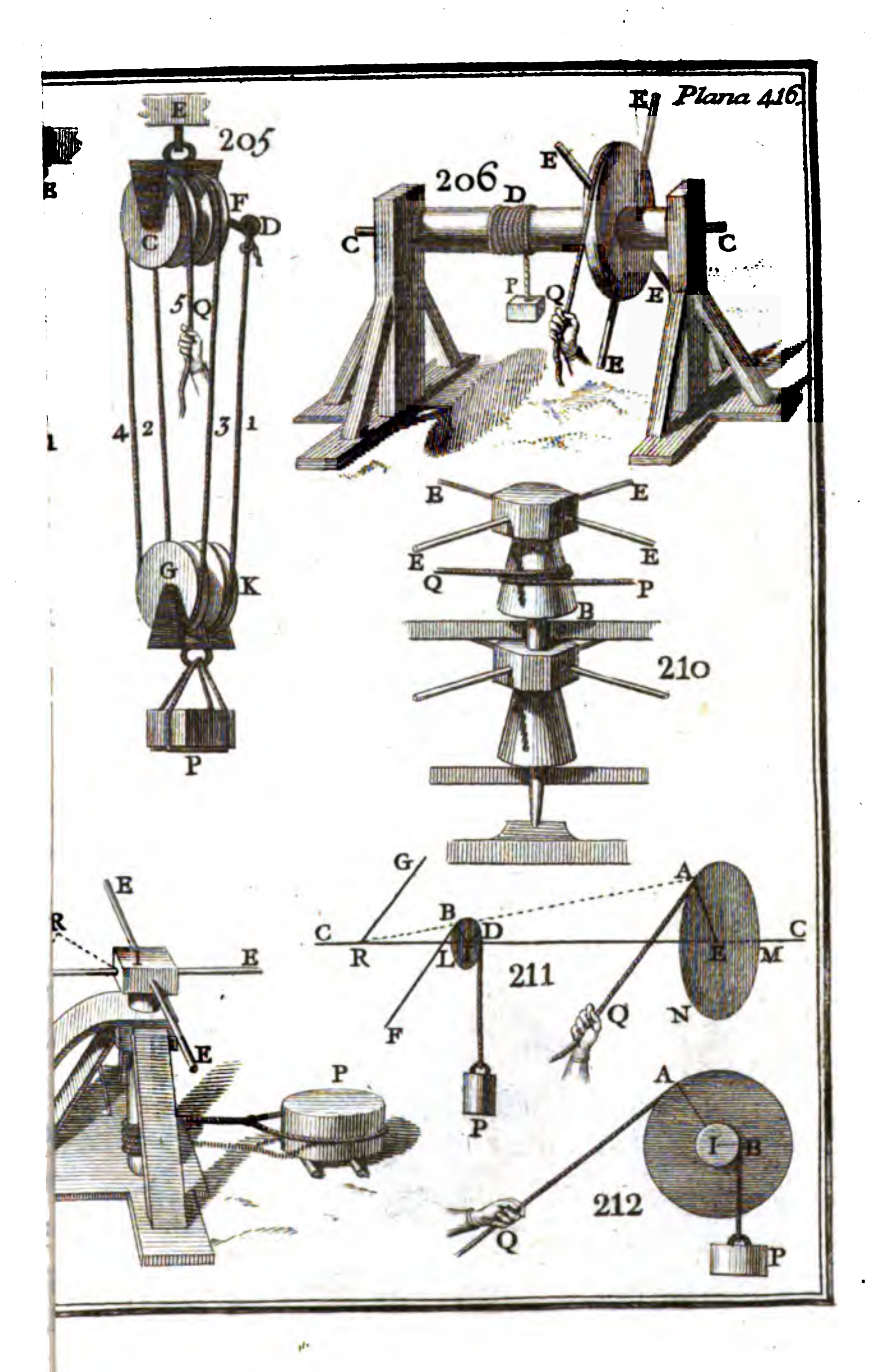
de una masa conocida M, animada de dicha velocidad V. Fig. Llamemos v la velocidad con que se moverá el punto E, en virtud de la resistencia de P. Si llamamos R el brazo IE, y r el radio del cilindro, hallaremos la velocidad que P adquirirá, por medio de esta proporcion $R : r :: v : \frac{rv}{R}$, por ser evidente que el punto E, y el punto donde la cuerda toca el cilindro, tienen velocidades proporcionales á las distancias á que están del ege. Nos hemos, pues, de figurar (174) en el instante que obra la potencia, que la velocidad V se compone de la velocidad V que subsistirá, y de la velocidad $V - v$ que se perderá; y que en el mismo instante el peso P tiene la velocidad $\frac{rv}{R}$ que se verificará, y la velocidad $\frac{rv}{R}$ en una direccion contraria, cuya velocidad se perderá. Quiero decir, que la fuerza motriz reducida á la fuerza $M(V - v)$ se ha de equilibrar con la masa P impelida de la fuerza $\frac{Prv}{R}$. Luego (504) $M(M - v) \times R = \frac{Prrv}{R}$, de donde se saca $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr}$. Luego la velocidad del peso P, que es $\frac{rv}{R}$, será $\frac{MVrR}{MRR + Prr}$. Luego para averiguar qué razon ha de haber entre R y r, á fin de que el peso P adquiera la mayor velocidad posible, hemos de igualar con cero (III. 408) la diferencial de dicho valor, sacándola en el supuesto de no haber mas variable que r. Tendremos, pues, $MVRdr(MRR + Prr) - MVRr \times 2Prdr = 0$, de donde sacaremos $MRR = Prr$, y $r = R\sqrt{\frac{M}{P}}$. Si el peso P fuese, por egemplo, de 100000 libras, y la masa de la fuerza motriz valiera por un peso de 10 libras, sería $r = R\sqrt{\frac{10}{100000}} = R \times \frac{1}{100}$; quiero de-

Fig. decir que el radio del cilindro habría de ser la centésima parte del brazo *IE*, para que resultase el mayor efecto posible. No se ganaría nada, antes se perdería con aumentar ó disminuir el brazo *IE*, ó el radio del cilindro.

213. 507 Si el peso *Q* aplicado á la circunferencia de la rueda, se lleva, á impulsos de su pesantez, el peso *P* aplicado á la circunferencia del cilindro; se pueden proponer acerca de este movimiento las dos cuestiones siguientes. 1.° ¿Qué razon ha de haber entre *Q* y *P* para que la cantidad de movimiento que *P* adquiriere sea la mayor posible? 2.° ¿Qué razon ha de haber entre el radio *R* de la rueda, y el radio *r* del cilindro, para que suba *P* con la mayor brevedad posible? cuyas cuestiones se resolverán del modo siguiente.

Sea p la velocidad que la pesantez comunica á un cuerpo libre en un segundo de tiempo, y por consiguiente pdt la que le comunica en el instante dt. Sea dv la que adquirirá en realidad el cuerpo *Q*, y por consiguiente $\frac{rdv}{R}$ la que adquirirá *P*; hemos, pues, de imaginar (174) la velocidad pdt que *Q* habría de adquirir en un instante, como compuesta de la velocidad dv que tendrá con efecto, y de la velocidad $pdt - dv$ que le hará perder la resistencia de *P*. Hemos de concebir tambien la velocidad pdt que *P* hubiera tenido si hubiera estado libre, como compuesta de la velocidad $\frac{rdv}{R}$ que adquirirá en una direccion contraria, y de la velocidad $pdt + \frac{rdv}{R}$ que se perderá. Por consiguiente, yá que las velocidades $pdt - dv$, y $pdt + \frac{rdv}{R}$

se


Plana 416.
205
E
F
D
C
5 Q
4 2 3 1
G
K
P
206
E
D
C
C
P
Q
E
E
210
E
E
E
E
Q
P
B
211
G
A
B
C
D
C
R
L
E
M
F
Q
N
P
E
R
E
I
E
P
212
A
I
B
Q
P

se han de perder, es preciso (504) que $Q(pdt - dv)R$ Fig.
$= P(pdt + \frac{rdv}{R}) \times r$, de donde se saca $dv = \frac{QR^2 - PrR}{QRR + Prr} pdt$, y por consiguiente la velocidad que P adquirirá en el mismo instante, será $\frac{QrR - Prr}{QRR + Prr} pdt$. Luego la cantidad de movimiento que recibe cada instante, será $\frac{PQrR - P^2r^2}{QRR + Prr} pdt$. Y para que esta cantidad sea un *máximo*, es preciso que sea cero su diferencial, sacándola en el supuesto de no haber mas variable que P; tendremos, pues, $(QR^2 + Pr^2)(QrRdP - 2r^2PdP) - (PQrR - P^2r^2)r^2dP = 0$, ó $Q^2R^3 - 2PQR^2r - P^2r^3 = 0$, de cuya espresion es facil sacar el valor de P.

Pero si en el supuesto de ser dadas P y Q, quisiéramos averiguar qué razon ha de haber entre r y R, para levantar P con la mayor brevedad posible; habríamos de diferenciar la espresion de la velocidad de P, tratando sola r como variable, é igualar con cero la diferencial que resultase. De esta operacion sacaríamos la equacion $QR^2 - 2PRr - Pr^2 = 0$, de la qual es facil inferir la razon entre R y r.

Por lo que mira al movimiento que tendrán los dos cuerpos P y Q, es facil percibir que será un movimiento uniformemente acelerado, parecido al de los cuerpos graves que caen libremente, porque la velocidad que recibe Q á cada instante, siendo espresada por $dv = \frac{QR^2 - PrR}{QR^2 + Pr^2} pdt$, es constante, y tiene con la velocidad pdt que la gravedad comunica á un cuerpo libre, la misma razon que $\frac{QR^2 - PrR}{QR^2 + Pr^2}$ con 1. Luego será facil determinar por lo dicho (37 y sig.) los

Fig. espacios que andan Q y P, y sus velocidades al cabo de un tiempo qualquiera t.

Si quisiéramos atender á la pesantez de las cuerdas DP, CQ, no habría nada que mudar en la resolucion precedente, bastaría substituir en lugar de P, P mas el peso de DP; y en lugar de Q, Q mas el peso de CQ. Sea, pues, q la gravedad específica de la cuerda CQ, y q' la gravedad específica de la cuerda DP, esto es, lo que pesa un pie de esta cuerda. Llamemos z y z' respectivamente lo que cogen de largo CQ y DP, tendremos $du = \frac{R^2(Q+qz) - rR(P+q'z')}{RR(Q+qz)+r^2(P+q'z')} pdt$. Pero las velocidades de Q y P son respectivamente $\frac{dz}{dt}$ y $-\frac{dz'}{dt}$ *, y por consiguiente $\frac{dz}{dt} : -\frac{dz'}{dt}$, ó $dz : -dz' :: R : r$; luego $-dz' = \frac{r}{R}dz$, y por lo mismo $C - z' = \frac{r}{R}z$. Sea a lo que DP coge de largo quando $z = 0$; será, pues, $C = a$, y por consiguiente $a - z' = \frac{r}{R}z$, ó $z' = a - \frac{r}{R}z$. Si substituimos este valor en lugar de z', $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ en lugar de dv, y llamamos despues, para abreviar, $QR^2 - PrR - q'rRa = b$, $qR^2 + q'r^2 = c$, $QR^2 + Pr^2 + q'r^2a = b'$, $qR^2 - q'r^2\frac{r}{R} = c'$, sacaremos $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b'+c'z} pdt$. Multiplicando por $\frac{dz}{dt}$, saldrá $\frac{dz}{dt} d\left(\frac{dz}{dt}\right) =$ ** $p\left(\frac{c}{c'}dz - \frac{b'c - bc'}{c'} \frac{dz}{b'+c'z}\right)$; luego integrando, sacaremos $C' + \frac{dz^2}{2dt^2} = p\left(\frac{c}{c'}z - \frac{b'c - bc'}{c'c'} \log(b' + c'z)\right)$. Y si suponemos que quando $z = 0$, $\frac{dz}{dt}$ ó v sea cero, tendremos $C' = -p\left(\frac{b'c - bc'}{c'c'}\right) L.b'$, y por consiguiente $\frac{dz^2}{2dt^2}$ ó $\frac{v^2}{2} = p\left[\frac{c}{c'}z + \frac{b'c - bc'}{c'c'} L\left(\frac{b'}{b'+c'z}\right)\right]$. Luego

dt

* Ponemos el signo —, porque z' vá menguando quando crece t.

** Dividiendo $cz + b$ por $cz' + b'$.

Fig.

$$dt = \frac{c'dz}{\sqrt{2}.\sqrt{p\left[cc'z + (b'c - bc')\,L.\left(\frac{b'}{b'+c'z}\right)\right]}}$$, cuya equacion no se puede integrar generalmente sino por aproximacion.

Si $c' = 0$, quiero decir, si $R = r$, cuya circunstancia concurre en la polea, la equacion $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b'+c'z}pdt$ se reduce á $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{b+cz}{b}pdt$.

508 Quando resolvimos la cuestion propuesta (506) no llevamos en cuenta la cantidad de materia de la rueda, ó de las barras y del cilindro. Como puede ser de bastante consideracion en muchos casos, de modo que consuma gran parte de la fuerza de la potencia, es preciso no despreciarla, porque sin este cuidado no es posible decidir con certeza, si servirá la máquina, si la potencia comunicará la velocidad necesaria. Es facil cumplir con esta condicion despues de 209.
lo dicho (316). Se ha de considerar la masa P, la de las barras, ó de la rueda quando la hay, y la del cilindro, como que no componen mas que un solo cuerpo obligado á dar vueltas al rededor de un ege fijo, que en este caso es el ege del cilindro, considerando la masa P como aplicada á la superficie de dicho cilindro. Si llamamos $S.mr'r'$ la suma de los productos de las partículas de la rueda y del cilindro, por los quadrados de las distancias á que están del ege, tendremos $v = \frac{MVRR}{MRR+Prr+S.mr'r'}$, que solo es el mismo valor que sacamos antes (506) quando $S.mr'r'$ es tan pequeña respecto de $MRR + Prr$, que se puede despreciar.

Fig. ciar. En todo lo que precede no hemos atendido al grueso de las cuerdas; pero si fuese de alguna consideracion su diámetro, se deberá tomar por el radio de la rueda y el del cilindro, su verdadero radio, añadiéndole el radio ó semidiámetro de la cuerda, porque se debe considerar que la accion se comunica en la direccion del ege de la cuerda.

509 La segunda de las dos cuestiones que hemos resuelto (507), resuelve la cuestion en la qual se preguntára qué razon ha de haber entre r y R, para que el peso P llegue á una altura dada en el menor tiempo posible.

Porque yá que, segun hallamos, la fuerza aceleratriz de P es $\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2} pdt$; si llamamos z el espacio que P habrá andado al cabo del tiempo t, será $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ dicha fuerza aceleratriz, y por consiguiente $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2} pdt$. Si multiplicamos por $\frac{dz}{dt}$, é integramos, sacaremos $\frac{dz^2}{2dt^2} = \frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2} pz$; con suponer que quando $z = 0$, sea la velocidad $\frac{dz}{dt} = 0$.

Tenemos, pues, $dt = \frac{dz}{\sqrt{2pz}} \times \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QrR - Pr^2}\right)}$, y por consiguiente $t = \sqrt{\frac{2z}{p}} . \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QrR - Pr^2}\right)}$; de donde se saca $\frac{1}{t} = \sqrt{\frac{pz}{2}} \times \sqrt{\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$; por donde se echa de ver que siendo z dada ó constante, es preciso que t sea un *mínimo* para que P llegue á la altura propuesta en el menor tiempo posible; luego $\frac{1}{t}$ será un *máximo* una vez que z se supone constante. Por consiguiente, será preciso que $\sqrt{\frac{pz}{2}} . \sqrt{\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$ sea un *máximo*, y por consiguiente, por ser z constante, será preciso que $d\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right) = 0$, que es cabalmente lo que hemos hecho (507). Pero si en el supuesto de ser dado el espacio que Q ha de andar, quisié-

siéramos averiguar la razon que ha de haber entre R y r, Fig.
para que el espacio z andado por P, comparado con el tiempo que gastará en andarle, sea el mayor posible; en este caso será preciso que $\frac{z}{t}$ sea un *máximo*, siendo z y t variables. Será, pues, preciso que $d\left[\sqrt{\frac{pz}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}\right] = 0$, despues de hecha la diferenciacion en el supuesto de ser z y r variables.

Sea a el espacio, dado que Q ha de andar; será $\frac{ra}{R} = z$; será, pues, preciso que $d\left(\sqrt{\frac{par}{2R}} \cdot \sqrt{\left(\frac{QrR - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}\right) = 0$, ó $d\sqrt{\left(\frac{QRr^2 - Pr^3}{QR^3 + Pr^2R}\right)} = 0$, ó finalmente $d\left(\frac{Qr^2R - Pr^3}{QR^3 + PRr^2}\right) = 0$, que dá $2QQR^3 - 3PQR^2r - P^2r^3 = 0$, por medio de cuya equacion se determinará la razon de r á R.

Si dados los radios R y r, quisiéramos averiguar qué razon ha de haber entre Q y P, para que el espacio andado por P, comparado con el tiempo que gastaría en andarle, fuese el mayor posible, en el supuesto de ser dado el que Q ha de andar; diferenciaríamos la misma cantidad considerando, ó P sola, ó Q sola como variable.

310 Hay una infinidad de máquinas que en todo ó en parte pueden referirse al torno, y por consiguiente á la palanca, quales son el *Cric* ó *Gato*, *las Ruedas dentatas* &c. y todas las máquinas que sirven para empujar dando vueltas; bien que estas últimas suelen participar del plano inclinado, de cuya máquina trataremos dentro de poco. En el cric el ege que está unido con la cigueña CRQ lleva un piñon P, cuyas alas ó dientes engargantan con los dientes de la barra dentata AB. El

(margin: 214. 215. 214.)

Fig. ala del piñon P levanta dando vueltas la barra AB por medio del diente inmediato, con una fuerza que es (500) á la fuerza Q aplicada á la cigueña, como el radio de la cigueña es al radio del piñon: de suerte que como el radio del piñon es muy pequeño respecto del de la cigueña, se pueden levantar con esta máquina pesos bastante grandes con una fuerza mediana.

511 Se hace uso de las ruedas dentatas para fines muy distintos unos de otros; unas veces sirven para aumentar la fuerza, otras para mudar la velocidad, y otras para aumentar la direccion de los movimientos; suelen servir tambien para que salgan ajustados los movimientos á ciertos periodos de tiempo, ó para hacer que sean perceptibles movimientos que la vista no podría percibir.

215. Quando muchas ruedas dentatas V, X, Y, Z se comunican unas con otras por medio de los piñones u, x, y, z se puede averiguar del modo siguiente la razon que hay entre la potencia Q aplicada á la primera de dichas ruedas, y el peso P que puede sostener el último piñon. Sean R, R', R'', R''' los radios de dichas ruedas; r, r', r'', r''' los de sus piñones. Consideraremos la fuerza que el ala de un piñon qualquiera hace en el diente de la rueda inmediata, como una potencia aplicada á esta; en virtud de esto, y de lo dicho (500), llamando E, E', E'' dichas fuerzas, tendremos $Q : E :: r : R$; $E : E' :: r' : R'$; $E' : E'' : r'' : R''$; $E'' : P :: r''' : R'''$; de donde, multiplicando por orden, sacaremos $Q : P :: rr'r''r''' : RR'R''R'''$; esto es, que la potencia

es

es al peso, como el producto de los radíos de todos los piñones, es al producto de los radios de todas las ruedas; por egemplo, si fuese el radio de cada piñon 10 veces menor que el de su rueda, una potencia de una libra sostendrá un peso de 10000 libras. Fig.

Pero si por una parte aumentan la fuerza las ruedas dentatas, por otra hacen perder tiempo, porque disminuyen la velocidad. Con efecto, mientras la rueda *V* dá una vuelta, el piñon *u* que tambien dá una vuelta, hace pasar tantos dientes, no mas, de la rueda *X* como alas tiene él; de suerte que si la rueda *X* tiene 48 dientes, y el piñon *u* 6 alas, la rueda *X* no dá mas que la octava parte de una vuelta mientras la rueda *V* dá una vuelta entera; asimismo se prueba que anda la rueda *Y* mas despacio que la rueda *X*, y así de las demás.

512 Averiguemos ahora cómo se puede aumentar la velocidad en una razon dada, por medio de las ruedas dentatas.

Sea una rueda dentata *V* que engarganta con un piñon *u*; 216. es evidente que mientras diere una vuelta la rueda *V*, dará el piñon *u* tantas vueltas quantas veces el número de sus alas cupiere en el número de los dientes de la rueda *V*; quiero decir, que mientras dá una vuelta la rueda *V*, dará el piñon *u* un número de vueltas espresado por $\frac{N}{n}$, si espresa *N* el número de los dientes de la rueda, y *n* el número de las alas del piñon.

Luego si el ege del piñon *u* lleva una rueda *X*, que

Fig. tambien entre en un piñon x, mientras la rueda X, ó el piñon u diere una vuelta, dará el piñon x un número de vueltas espresado por $\frac{N'}{n'}$, si espresa N' los dientes de la rueda X, y n' las alas del piñon x. Luego mientras la rueda X diere un número de vueltas espresado por $\frac{N}{n}$, esto es, mientras la rueda V diere una vuelta, dará el piñon x un número de vueltas espresado por $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$, ó $\frac{NN'}{nn'}$. Y si considerásemos un número mayor de ruedas y de piñones, hallaríamos que el número de vueltas que dará el último piñon mientras dá una vuelta la primera rueda, es representado por un quebrado cuyo numerador es el producto de los números de los dientes de todas las ruedas, y el denominador el producto de los números de las alas de todos los piñones.

Luego se empeña en resolver una cuestion indeterminada, que admite muchas resoluciones, el que busca qual ha de ser el número de los dientes, y de las alas de un número propuesto de ruedas y piñones, para que la velocidad de la última pieza sea en razon dada con la de la primera: dos egemplos manifestarán cómo se puede resolver.

Propongámonos averiguar quántos dientes han de llevar las dos ruedas V y X, y quántas alas los piñones u y x, para que el piñon x dé 50 vueltas, mientras dá una la rueda V. Tendremos $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Aquí no conocemos mas que el cociente de NN' partido por nn'; pero no conocemos ni el dividendo ni el divisor. Tomemos, pues, á arbitrio por el divisor nn' un número compuesto de dos factores que no sean ni muy pequeños ni muy grandes, á fin de que no exce-

cedan los números de alas que puedan llevar los piñones. Supongamos, por egemplo, $nn' = 7 \times 8 = 56$. Podremos suponer $n = 7$ y $n' = 8$. En virtud de esto tendremos $\frac{NN'}{56} = 50$, ó $NN' = 50 \times 56$; pero como 50 y 56 no exceden el número de los dientes que se le puede dár á cada rueda, supondremos $N = 50$, y será por consiguiente $N' = 56$. Si estos dos factores, ó el uno de ellos hubiera sido muy grande, los hubiéramos resuelto en todos sus factores primeros, para ver si de la combinacion de estos factores, resultaban dos factores menores, ó si no, hubiéramos tomado otro número por nn'. Fig.

Indaguemos tambien, por egemplo, qual ha de ser el número de los dientes de tres ruedas, y de las alas de tres piñones, para que dando el último piñon una vuelta en 12 horas, dé la primera rueda una vuelta en un año.

Como el año comun es de 525949 minutos, y 12 horas valen 720 minutos, es evidente que mientras dá una vuelta la primera rueda, el último piñon dará un número de vueltas espresado por $\frac{525949}{720}$; tenemos, pues, $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. Tomemos á arbitrio $n = 7$, $n' = 8$. Tendremos $\frac{NN'N''}{7 \times 8 \times n''} = \frac{525949}{720}$, ó $NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8\, n'' = \frac{3681643n''}{90}$. Pero como es preciso que $NN'N''$ sea un número entero, es evidente que para resolver exactamente la cuestion, se habría de tomar por n'' un múltiplo de 90; y como sería muy grande este último para poder ser el número de las alas de un piñon, es menester ver si añadiéndole ó quitándole un corto número de unidades al numerador del último

gue-

Fig. quebrado, podría ser un número entero; como discreparía poco este número del valor verdadero de $NN'N''$, se tomaría por este producto.

Sea, pues, q el menor número de unidades que se le ha de quitar al numerador, y sea t el número entero que de esto resulta, y que se podrá tomar por $NN'N''$; tendremos, pues, $\frac{3681643n''-q}{90}=t$, ó $40907n''+\frac{13n''-q}{90}=t$. Es, pues, preciso que $\frac{13n''-q}{90}$ sea un número entero; llámole s. Sale, pues, $\frac{13n''-q}{90}=s$, ó $n''=\frac{90s+q}{13}=6s+\frac{12s+q}{13}$. Hago $\frac{12s+q}{13}=r$, y sale $s=\frac{13r-q}{12}=r+\frac{r-q}{12}$. Finalmente, hago $\frac{r-q}{12}=k$, y sale $r=12k+q$. Luego $s=13k+q$, y $n''=90k+7q$. Pero como es preciso que n'' sea pequeño, supongo $k=0$, y dándole á q el menor valor posible en números enteros, supongo $q=1$. Tengo, pues, $n''=7$, y t ó $NN'N''=286350$. Resta saber ahora si este número se puede resolver en tres factores que se puedan tomar por los números de los dientes N, N', N''; puede con efecto resolverse en tres factores de este caracter que son 50, 69, 83 que no son muy grandes para el caso. Se puede, pues, conseguir lo que se propone en la cuestion, disponiendo como se quisiere tres ruedas de 50, 69 y 83 dientes, y tres piñones de 7, 7 y 8 alas.

Si el valor numérico de $NN'N''$ que por este camino se halla, no tuviese factores á proposito para espresar el número de dientes que con comodidad se pueden abrir en las ruedas, sería preciso repetir la operacion dando otros valores á q, ó á n, ó á n'.

Aun-

Aunque no es mas que aproximada la resolucion que Fig.
se alcanza omitiendo, conforme lo hemos practicado, algunas unidades, es no obstante bastante exacta. Porque en el caso propuesto, el número de vueltas que dá el último piñon mientras dá una vuelta la primera rueda es $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{286350}{7 \times 7 \times 8}$; si multiplicamos esta cantidad por 12 horas, que ha de durar cada vuelta, hallaremos que durará la revolucion de la primera rueda $365^d\ 5^h\ 48'\ 58''\frac{38}{49}$, y hemos supuesto que se compone el año de $365^d\ 5^h\ 49''$.

Del Rozamiento en el Torno.

513 Representa el círculo *OMC* el corte del tambor 217.
de un torno orizontal que levanta un peso *P* atado á la cuerda *MP* aplicada al mismo tambor; el círculo chico *x* es el corte del ege de la máquina; el círculo *BRD* es el corte de la rueda á que está aplicada la potencia motriz obrando en una direccion tangente qualquiera *DF*.

El peso *P* produce en el centro ó ege *A* del movimiento, una presion vertical igual á sí mismo, cuya presion representaremos por la vertical *AO*. Supongamos que sea *F* la fuerza que basta para mantener en equilibrio el peso *P*, y que sea *x* la fuerza que se le ha de añadir á *F* para vencer el rozamiento. Represente *DE* la fuerza $F + x$, y resolvámosla en otras dos *DK*, *DH*, la una vertical, y la otra orizontal. La fuerza vertical *DK* causa en el centro *A* una presion igual á sí misma; de suerte que si hacemos $ON = DK$, la presion vertical que aguanta el centro se po-

Fig. podrá representar por *AN*. La fuerza orizontal *DH* causa en el centro *A* una presion orizontal *AL* igual á sí misma. Por consiguiente, si concluimos el paralelogramo rectángulo *ANQL*, representará su diagonal *AQ* la presion que resulta contra el punto *q* de la superficie del ege, cuya presion ocasiona el rozamiento que hemos de considerar como una fuerza cuya direccion toca en el punto *q* el círculo *x*.

Llamemos el radio *Aq* del ege, *a*; el radio *AO* del tambor, *b*; el radio *AD* de la rueda, *c*; el seno total, 1; el seno del ángulo *HDE* (que conocemos), *f*; el coseno del mismo ángulo $= \sqrt{(1 - ff)}$, *g*; la razon entre el rozamiento y la presion, *n*.

La espresion de la fuerza *DK* será $(F + x)f$; la de la fuerza *DH* ó *AL* será $(F + x)g$; la de la fuerza *AN* será $P + (F + x)f$; la de la fuerza *AQ* será $\sqrt{\left[(F + x)^2 gg + (P + (F + x)f)^2\right]}$, y la del rozamiento $n\sqrt{\left[(F + x)^2 gg + (P + (F + x)f)^2\right]}$.

Sentado esto, pide la naturaleza del equilibrio que el momento de la fuerza *x* sea igual al momento del rozamiento; tendremos, pues, la equacion $cx = an\sqrt{\left[(F + x)^2 gg + (P + (F + x)f)^2\right]}$, ó $ccxx = aann\left[(F + x)^2 gg + PP + 2Pf(F + x) + ff(F + x)^2\right]$, ó tambien por ser $gg + ff = 1$, $ccxx = aann\left[(F + x)^2 + PP + 2Pf(F + x)\right]$, de donde sale con facilidad $x = \frac{fn^2a^2P + n^2a^2F}{c^2 - n^2a^2} \pm \frac{\sqrt{(n^2a^2c^2F^2 - g^2n^4a^4P^2 + n^2a^2c^2P^2 + 2fn^2a^2c^2PF)}}{c^2 - n^2a^2}$.

514 Por ser algo complicada esta fórmula, obligaría en

en la práctica á cálculos muy penosos; pero como las mas Fig.
veces es vertical ó quasi vertical, la direccion de la fuerza F, sucede que rigurosa, ó sensiblemente por lo menos, $g = 0$, $f = 1$ (I. 645); por consiguiente tomando el signo superior del radical, y sacando, como se puede, la raiz quadrada, tendremos $x = \frac{n^2a^2(P+F)}{c^2-n^2a^2} + \frac{nac(P+F)}{c^2-n^2a^2} = \frac{na(c+na)(P+F)}{(c-na).(c+na)} = \frac{na(P+F)}{c-na}$, ó poniendo en lugar de F su valor $\frac{Pb}{c}$, $x = \frac{na\left(P+\frac{Pb}{c}\right)}{c-na}$.

Cuya fórmula es sencillísima, y se hubiera podido sacar directamente sobre la marcha.

Para hacer algun uso de ella, supongamos el peso $P = 600$ lib, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{b}{c} = \frac{1}{6}$, $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; hallaremos $x = 3\frac{163}{179}$ lib; esto es, que la fuerza que es preciso añadir para vencer el rozamiento, será de cerca de 4 libras. Por consiguiente la potencia que, si no fuera por el rozamiento, hubiera sido de 100 libras solamente, habrá de ser de 104 por razon de esta resistencia.

De donde se infiere que el efecto del rozamiento es casi insensible en el torno, porque obra esta resistencia en el estremo de un brazo de palanca muy corto, respecto del brazo de palanca en cuyo estremo obra la potencia.

Del Equilibrio y Movimiento en los Planos.

515 No puede un cuerpo P, sea la que fuere su figura, que toca un plano XZ en un punto qualquiera C, y 218.
está solicitado de una fuerza única, mantenerse inmobil en

di-

Fig. dicho plano, á no ser que concurran las dos condiciones siguientes. 1.ª la direccion *AD* de la fuerza única que le solicita, ha de ser perpendicular al plano *XZ*. 2.ª Esta direccion ha de pasar por el punto *C* donde el cuerpo toca el plano.

Se viene á los ojos, sin que sea menester probarlo, que es precisa la primera de las dos condiciones espresadas. Por lo que mira á la segunda, es facil manifestar que es igualmente indispensable; porque si la direccion *AD* del cuerpo *P′*, por egemplo, aunque perpendicular al plano, no pasase por el punto de contacto *C*, la resistencia del plano, que no puede menos de obrar en la direccion de la perpendicular al punto *C*, no sería directamente opuesta á la fuerza *AD*, y no la podria contrarrestar aunque fuesen iguales la resistencia y la fuerza.

516 Si el cuerpo en vez de tocar el plano en solo un
219. punto, le tocáre en muchos, ó con una superficie plana,
220. no será indispensable que la fuerza única *AD* que en él obra, pase por alguno de dichos puntos; pero será preciso que sea perpendicular al plano, y que se pueda resolver en tantas fuerzas perpendiculares al plano, quantos fueren los puntos del cuerpo que en el plano descansan, y habrán de pasar dichas fuerzas por estos puntos. De suerte, que si el cuerpo *P*, por egemplo, tocase el plano en dos puntos *C* y *C′*, y no estuviese la fuerza *AD* en el plano que pasase por las perpendiculares levantadas en los puntos *C* y *C′*, no sería posible el equilibrio, porque no se podría resolver la fuer-

fuerza *AD* en fuerzas que pasasen por C y C', sin que resultase una tercera fuerza que no estaría sostenida. Fig.

517 Luego si un cuerpo que toca un plano en uno ó muchos puntos, está solicitado de muchas fuerzas dirigidas como se quisiere, es menester 1.° que estas tres fuerzas puedan reducirse á sola una que pase por dicho plano. 2.° que esta, en el caso de no pasar por uno de los puntos de contacto, pueda resolverse en tantas fuerzas no mas, que la sean paralelas, quantos puntos de contacto hubiere, y que cada una de estas pase por uno de dichos puntos de contacto.

518 Por consiguiente, si la fuerza única que solicita el cuerpo, fuese la pesantez, será preciso que el plano sea orizontal, y si la vertical tirada desde su centro de gravedad no encontrase uno de los puntos de contacto, será preciso á lo menos que no dege todos estos puntos á un mismo lado.

519 Luego si el cuerpo está solicitado de dos fuerzas no mas, será menester 1.° que dichas dos fuerzas estén en un mismo plano. 2.° que sea este plano perpendicular al plano sobre que descansa el cuerpo. 3.° que la derivada, que siempre ha de ser perpendicular á este último plano, no dege á un mismo lado todos los puntos de contacto.

Y si la una de dichas fuerzas fuese la gravedad, será preciso, á mas de esto, que dicho plano sea vertical, y pase por el centro de gravedad del cuerpo.

520 Veamos ahora qué razon ha de haber en general

Fig. ral entre dos fuerzas que mantienen un cuerpo en equilibrio sobre un plano.

221. Sean *CQ*, *CP* las direcciones de las dos fuerzas; concibamos que sea *AB* la interseccion del plano de estas dos fuerzas con el plano donde descansa el cuerpo; y tirando á *AB* la perpendicular *CH*, imaginemos que sea esta linea la diagonal, y las direcciones *CQ*, *CP* los lados del paralelogramo *CEDF*. Para que la derivada de las dos fuerzas *Q* y *P* tenga la direccion *CD* ó *CH*, es menester (70) que las dos fuerzas *Q* y *P* sean entre sí como *CF* es á *CE*; en cuyo caso las dos fuerzas *Q* y *P*, y la presion que hacen en el plano, que llamaremos *H*, serán tales que tendremos $Q : P : H :: CF : CE : CD$.

521 En virtud de lo dicho (81) tendremos tambien $Q : P : H ::$ sen ECD : sen FCD : sen ECF.

522 Por dos puntos qualesquiera *A* y *B* de la linea *AB* tiremos *AG* y *BG* perpendiculares á las direcciones de las dos fuerzas *Q* y *P*. Tendrá el triángulo *ABG* sus lados perpendiculares á los del triángulo *CDE*, y serán por lo mismo semejantes estos dos triángulos. Tendremos, pues, $AG : BG : AB :: DE$ ó $CF : CE : CD$; esto es (520) $:: Q : P : H$; luego $AG : BG : AB :: Q : P : H$.

Pero (I. 671) $AG : GB : AB ::$ sen ABG : sen BAG : sen AGB; luego $Q : P : H ::$ sen ABG : sen BAG : sen AGB. Manifiesta esta proporcion que quando dos fuerzas no mas obran en un cuerpo para mantenerle en equilibrio sobre un plano; si imaginamos otros dos planos en tal situacion que

las

las dos fuerzas les sean perpendiculares, cada una de estas dos Fig.
fuerzas, y la presion que causan en el plano principal, está representada por el seno del ángulo que forman los planos á los quales son perpendiculares las otras dos fuerzas.

523 Ya que las razones que acabamos de determinar se verifican sea la que fuere la naturaleza de las dos fuerzas *P* y *Q*, se verificarán igualmente quando la una de las dos, por egemplo la fuerza *P*, fuere la gravedad; en cuyo caso el plano *BG* será orizontal.

524 Por ser (521) *Q* : *P* : *H* :: sen *ECD*:
sen *FCD* : sen *ECF*, se infiere que *Q* : *P* :: sen *ECD*: 222.
sen *FCD*, ó :: sen *HCP* : sen *HCQ*; luego si fuere conocido el peso *P*, la potencia *Q*, y el ángulo *HCP* que forma la direccion del peso *P* con la perpendicular al plano, y se quisiere determinar el ángulo que ha de formar la potencia *Q* con la misma perpendicular, se hallará facilmente por la última proporcion, que dá sen $HCQ = \frac{P \times \text{sen } HCP}{Q}$. Pero como el seno de un ángulo es (I.646) tambien el seno de su suplemento, puede una misma potencia sostener con dos direcciones distintas un mismo peso sobre un mismo plano. Han de ser tales estas direcciones que los dos ángulos *HCQ*, *HCQ* que formaren con la perpendicular *CH*, sean suplemento uno de otro; pero si se prolonga la perpendicular *HC* ácia *I*, el mayor de estos dos ángulos *HCQ*, es suplemento de *QCI*; luego ya que tambien ha de ser suplemento del ángulo menor *HCQ*, se infiere que *QCI*, y el ángulo menor *HCQ* son iguales; luego las dos direcciones en que

Fig. puede obrar una potencia para sostener un mismo peso sobre un mismo plano, están igualmente inclinadas respecto de la perpendicular á dicho plano, y por consiguiente respecto del plano mismo; y caen siempre ambas, respecto de la perpendicular al plano, al lado opuesto á aquel donde está la direccion de la pesantez del cuerpo.

525 Si en la proporcion $Q : P :: \text{sen } HCP : \text{sen } HCQ$, substituimos en lugar del ángulo *HCP* la inclinacion *ABG* del plano que es igual á dicho ángulo, como lo percibirá fácilmente el que considerare que estos dos ángulos son complementos de los ángulos opuestos al vértice *BRP*, *CRH*, tendremos $Q : P :: \text{sen } ABG : \text{sen } HCQ$, luego $Q = \frac{P \times \text{sen } ABG}{\text{sen } HCQ}$. Luego siendo la misma la inclinacion del plano, y uno mismo el peso, ha de ser tanto menor la potencia *Q*, quanto mayor fuere el seno de su inclinacion respecto de la perpendicular; y como el mayor de todos los senos es el de 90°, podemos decir que *la direccion en que tiene que gastar menos fuerza una potencia para sostener un peso en un plano inclinado, es la direccion paralela á dicho plano.*

526 En este caso la proporcion $Q : P :: \text{sen } ABG :$
223. sen HCQ se reduce á $Q : P :: \text{sen } ABG : 1$ ó al radio. Pero si desde el punto *A* se tira la perpendicular *AL* á la orizontal *BG*; el triángulo rectángulo *ALB* nos dará $\text{sen } ABG : 1 :: AL : AB$; luego $Q : P :: AL : AB$; y quiere decir, que *quando la potencia es paralela al plano, tiene con el peso la misma razon que tiene la altura del plano con su longitud.*

Si

527. Si fuese orizontal la direccion de la potencia, se probaría facilmente que el ángulo *HCQ* sería igual al ángulo *BAL*; en cuyo caso tendríamos *Q* : *P* :: sen *ABG* ó sen *ABL* : sen *BAL*; esto es (I. 671) :: *AL* : *BL*; luego *quando la direccion de la potencia es paralela á la base del plano inclinado, la potencia es al peso, como la altura del plano es á la base.* Fig. 224.

En general, la proporcion *Q* : *P* :: sen *ABG* : sen *HCQ* manifiesta que gastará tanto menos fuerza la potencia, quanto menor fuere la inclinacion del plano respecto del orizonte, y quanto menor fuere al mismo tiempo la inclinacion de la potencia respecto del plano; porque quanto menor fuere esta última inclinacion, tanto mas se acercará á los 90° el ángulo *HCQ* que es su complemento. 222.

Por lo que mira al punto del cuerpo donde la direccion de la potencia se ha de aplicar, la condicion que sirve para determinarle consiste en que la direccion de la potencia encuentre la vertical, tirada desde el centro de gravedad del cuerpo, en un punto tal que la perpendicular tirada desde dicho punto al plano tenga las circunstancias espresadas (515 y sig.). Con esto se esplica por que no es posible sostener sobre un plano inclinado una esfera homogenea, ó de una masa uniforme, á no ser que la direccion de la potencia que la ha de sostener pase por el centro de figura de la esfera, que es al mismo tiempo su centro de gravedad.

528 Si en vez de no haber mas que una potencia

Fig. para contrarrestár el peso hubiera muchas, diríamos de la derivada de dichas potencias quanto hemos probado respecto de la potencia Q. Por egemplo, si está sostenido el peso
125. P sobre el plano inclinado por la fuerza de una potencia R, y la resistencia de un punto fijo B, al qual está atada la cuerda BOR que abraza dicho cuerpo; por el punto de concurso S de las dos cuerdas BH, RD se imaginará una linea SC que divide en dos partes iguales el ángulo de las dos cuerdas BH, RD. Si esta linea corta la vertical tirada por el centro de gravedad de P en un punto C, desde el qual se le pueda bajar al plano una perpendicular que pase por el punto de contacto H, el equilibrio será posible, y estará determinada en virtud de los principios que hemos sentado, la razon que habrá entre el peso P, y la fuerza en la direccion de CS. Por lo que mira á la razon entre la fuerza en la direccion de CS, y la potencia R, será la misma que en la garrucha mobil (488). Por lo que, si fuere la potencia R paralela al plano, el peso P será á la potencia R, como la longitud del plano es á la mitad de su altura; quiero decir que gastará la potencia la mitad menos fuerza que si sostuviera el peso sin el auxilio del punto fijo B.

529 Por lo que mira á la presion total que aguanta el plano, será facil determinarla siempre que se quisiere por medio de las razones que hemos hallado. Por lo tocante á las presiones particulares que resultan en cada uno de los puntos en que el cuerpo descansa sobre el plano, son absolutamente indeterminadas, á excepcion del caso en que el cuerpo descan-

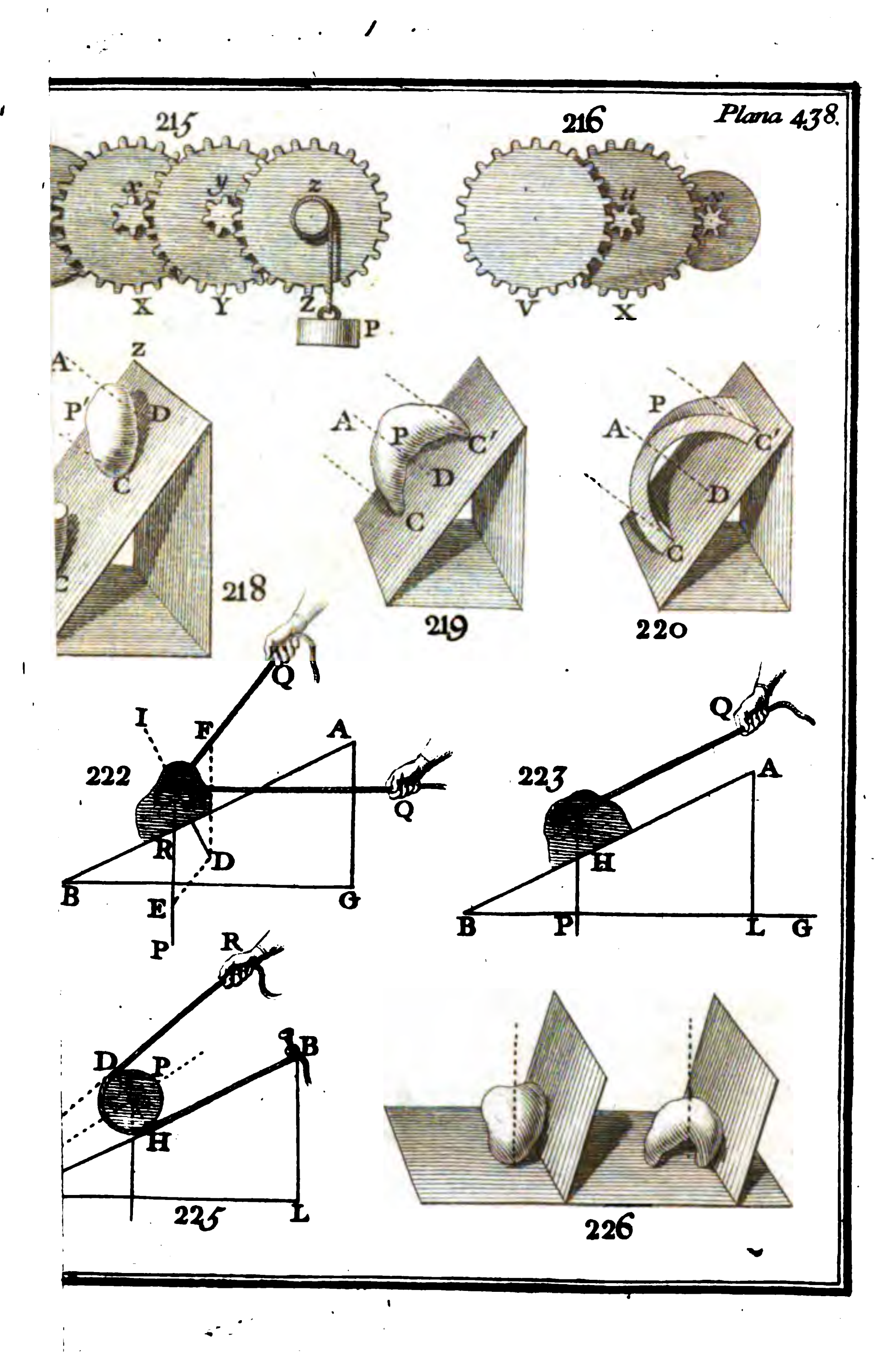
cansa sobre dos puntos; entonces la presion total se reparte entre estos dos puntos, en razon inversa de las distancias á que está su direccion de dichos dos puntos. En todos los demás casos no hay para determinarlas mas condicion sino 1.° que su suma sea igual á la presion total. 2.° que la suma de sus momentos, tomándolos respecto de un ege perpendicular á la direccion de dicha presion total, sea cero; y que lo propio se verifique respecto de los momentos, refiriéndolos á otro ege perpendicular al primero, con tal, á mas de esto, que dichos dos eges pasen por un punto de la direccion de la presion total. Así, quando un cuerpo descansa sobre un plano, tocándole con una superficie plana, no hay razon ninguna para suponer que todos los puntos sobre que descansa, padezcan presiones iguales, sino quando su figura es la de un prisma, ó de un cilindro recto. Fig.

530 En quanto á los cuerpos que descansan sobre muchos planos á un tiempo, sea en virtud de una fuerza única, sea en virtud de muchas, entre las quales compreendemos su gravedad, la ley general de su equilibrio es 1.° que la derivada de todas sus fuerzas se pueda resolver en tantas fuerzas quantos son los puntos sobre que descansa el cuerpo. 2.° que estas sean perpendiculares al plano que toca el cuerpo en dicho punto.

De esto inferiremos que es condicion indispensable para que un cuerpo, que está solicitado de sola su pesantez, se mantenga en equilibrio entre dos planos inclinados, que haya en la vertical que pasa por su centro de gravedad á lo

Fig. lo menos un punto desde el qual se pueda tirar á cada uno de dichos planos una perpendicular, y que cada una de estas perpendiculares tenga las condiciones mencionadas (515 y
226. sig.). Que por consiguiente si fuese orizontal el uno de los dos planos, no podrá el cuerpo mantenerse en equilibrio (prescindiendo del rozamiento), sino en solo el caso de que la vertical tirada por su centro de gravedad pase por alguno de los puntos en que toca el plano orizontal, ó por lo menos en el caso de que dichos puntos no estén todos á un mismo lado de dicha vertical, en cuyo caso el otro plano nada tiene que sostener.

531 Bastan estos principios para determinar las condiciones del equilibrio por medio de los planos en qualesquiera circunstancias. Sirven tambien para esplicar la fuerza de las bóvedas, y, en general, por qué los cuerpos huecos, y cuya superficie esterior es convexa, se resisten con mayor fuerza á la compresion, que si fuese plana su superficie. Por egemplo, si un cuerpo se compone de quatro partes *ABCD*,
227. *CDFE*, *FEGH*, *ABGH* perfectamente duras, cuyas curvaturas esteriores ó interiores sean circulares y concéntricas; y si se le aplica al centro de gravedad de cada parte una misma fuerza en direcciones que vayan á parar al centro; nunca jamás se separarán unas de otras dichas partes, sea la que fuere la espresada fuerza. Porque se echa de ver que la fuerza aplicada á cada parte siempre se podrá considerar como resuelta en otras dos, perpendiculares á las dos caras planas de dicha parte; y entonces se verá que de una parte á su inmediata, hay siempre dos fuerzas iguales y di-


215
x
y
z
X
Y
Z
P
216
u
x
V
X
A
Z
P
D
C
218
A
P
C'
D
C
219
P
A
C'
D
C
220
Q
I
F
A
222
Q
R
D
B
E
G
P
Q
223
A
H
B
P
L
G
R
D
P
B
H
225
L
226

directamente contrarias, que por lo mismo se destruyen; por manera que todas las espresadas fuerzas se mantienen mutuamente en equilibrio. Fig.

Asimismo, si *EFGB*, *ABCD*, *HCKI* representan tres dóvelas consecutivas, ó tres partes consecutivas de una bóveda; desde qualquiera punto de la vertical tirada por el centro de gravedad de cada una de ellas se puede imaginar tirada una perpendicular á cada una de las dos caras de dicha dóvela; y como son muchos los puntos en quienes concurre esta circunstancia, siempre habrá uno, tal que la perpendicular tirada á una cara, será directamente opuesta á la perpendicular tirada á la misma cara desde alguno de los puntos de la vertical perteneciente á la dóvela inmediata. Dándole, pues, á cada dóvela un peso bastante, siempre se podrá hacer que sean iguales las dos fuerzas cuyas direcciones estuvieren en dichas perpendiculares, y poner por consiguiente dichas dóvelas en equilibrio; solo respecto de las dos dóvelas que tuvieren una cara orizontal no podrá efectuarse la resolucion propuesta, y para sostenerse necesitarán una resistencia orizontal. 228.

532 Hablemos ahora del movimiento en los planos, prescindiendo tambien del rozamiento.

Un cuerpo que está entregado á su propia pesantez, y cuya superficie descansa en parte sobre un plano sin rozamiento, puede, generalmente hablando, adquirir dos especies de movimiento; el uno que será comun á todas las partes, y en virtud del qual el centro de gravedad se escur-

Fig. currirá paralelamente al plano, y podrá tambien acercarse ó apartarse del plano; el otro en virtud del qual todas las partes darán vueltas al rededor de su centro de gravedad, de tal modo sin embargo que el cuerpo siempre toque el plano en algun punto.

La regla general que nos ha de guiar para saber si el cuerpo tomará ó no algun movimiento de rotacion en virtud de su pesantez, consiste en reconocer si la perpendicular tirada desde el centro de gravedad al plano encuentra alguno de los puntos por donde el cuerpo le toca, ó no los deja todos á un mismo lado. Si se verificáre esta condicion, no habrá movimiento de rotacion; porque la pesantez, que siempre se puede considerar como que obra en el mismo centro de gravedad, podrá resolverse en dos fuerzas, la una paralela, y la otra perpendicular al plano. Pero como concurren en la segunda las condiciones necesarias (515 y sig.) para el equilibrio, no surtirá efecto alguno, y quedará destruida. Por lo que toca á la primera, una vez que pasa por el centro de gravedad, debe repartirse igualmente entre todas las partes, que por lo mismo tendrán velocidades iguales y paralelas al plano. Así, por decirlo de paso, una esfera que descansa sobre un plano inclinado, bajaría escurriéndose por el mismo plano sin rodar, si no hubiese rozamiento; porque la perpendicular tirada desde su centro de gravedad al plano, pasa siempre por el punto de la superficie de la esfera que toca el plano.

Pero si la perpendicular tirada desde el centro de grave-

vedad al plano, no encuentra ninguno de los puntos por donde el cuerpo le toca, y los deja todos á un mismo lado; en este caso habrá movimiento de rotacion, porque la resistencia del plano que obra en la direccion de la perpendicular al punto de contacto (ó en la de la perpendicular que pasa por entre los puntos de contacto, quando son muchos) equivale á una fuerza que empujaría el cuerpo en una direccion paralela y contraria á la direccion en que el cuerpo comprime al plano; y como obra, segun suponemos, en una direccion que no pasa por el centro de gravedad, no puede menos de causar un movimiento de rotacion. Fig.

En virtud de esto, y de lo que dejamos dicho (408), se echa de ver que lo que varios Autores aseguran de que un cuerpo sentado en un plano inclinado dará de espaldas siempre que la vertical tirada por su centro de gravedad no encuentre la base sobre que descansa, se debe entender del caso en que hubiere rozamiento; porque no habiéndole, las condiciones para que el cuerpo se trastorne son diferentes, segun acabamos de observar.

Del Rozamiento en los Planos inclinados.

533 Sea *C* un cuerpo de qualquier figura, cuya base *GH* descanse sobre el plano inclinado *BA*. Si representamos por la vertical *CN* la pesantez absoluta del cuerpo *C*, y resolvemos esta fuerza en otras dos, la una *CM* perpendicular á *BA*, la otra *CO* paralela á *BA*, sabemos (522) que la fuerza *CM* con que el cuerpo *C* comprime perpendi- 229.

Fig. dicularmente el plano inclinado, es á la pesantèz absoluta CN de dicho cuerpo, como la base AL del plano inclinado es á su longitud BA. Por consiguiente, si llamamos P el peso del cuerpo C, tendremos la fuerza $CM = P \times \frac{AL}{BA}$; luego si espresamos por $\frac{n}{1}$ la razon entre el rozamiento y la presion, el rozamiento contra el plano BA será $= nP \times \frac{AL}{BA}$. Se ha de considerar este rozamiento como una fuerza que tendría la direccion AB, de suerte que para contrarrestarle, se le debe aplicar al cuerpo una fuerza igual que obre en la direccion opuesta BA.

De donde resulta que si abandonásemos el cuerpo á la sola accion de su pesantez relativa CO que es $= P \times \frac{BL}{BA}$, no empezaría á bajar sino quando fuese $P \times \frac{BL}{BA} > nP \times \frac{AL}{BA}$.

Supongamos, por egemplo, que el peso C sea de 600 libras, que el rozamiento sea $\frac{1}{4}$ de la presion, y que la altura del plano inclinado no sea mas que la duodécima parte de su longitud; esto es $P = 600$ libras, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{BL}{BA} = \frac{1}{12}$, $\frac{AL}{BA} = \frac{\sqrt{(144-1)}}{12} = \frac{\sqrt{143}}{12}$; la pesantez relativa CO no será sino de 50 libras, y la resistencia del rozamiento de cerca de 150 libras, y por lo mismo no podrá bajar el cuerpo. Pero si quedándose del mismo modo todo lo demás, suponemos que la altura del plano inclinado sea los $\frac{3}{5}$ de su longitud, quiero decir que $\frac{BL}{BA} = \frac{3}{5}$, y por consiguiente $\frac{AL}{BA} = \frac{\sqrt{(25-9)}}{5} = \frac{4}{5}$, la pesantez relativa será de 360 libras, y la resistencia del rozamiento de 150 libras. En este caso, bajaría el cuerpo en virtud del exceso de

de su pesantez relativa respecto de la resistencia del rozamiento, esto es, con una fuerza de 210 libras. Fig.

De la Rosca.

534 La *Rosca* es un cilindro recto, al rededor del 230.
qual está enroscado *espiralmente* un sólido que tiene, por 231.
lo que mira á su grueso, la forma de un prisma paralelográmico ó triangular. La una de las caras paralelográmicas de este sólido está arrimada á la superficie convexa del cilindro; y si imaginamos que el mismo sólido se compone de una infinidad de filetes paralelos entre sí, todos estos filetes al enroscarse al rededor del cilindro á diferentes distancias del ege *KH*, forman ángulos agudos é iguales unos con otros con rectas que los encontrasen, y fuesen paralelas al ege *KH*.

El relieve espiral, formado de este modo en la superficie del cilindro, se llama *Filete de la Rosca.* Llamaremos *Espira* la parte de un filete elemental del prisma que corresponde á una vuelta sobre el cilindro. La distancia *AB* que hay paralelamente al ege *HK* entre dos espiras correspondientes, se llama *Altura del Paso de la rosca*, ó *Paso de la rosca.* Es evidente que todos los pasos de la rosca son iguales entre sí.

La rosca entra en un sólido *MN* que se llama *Tuerca*, que por consiguiente ha de llevar interiormente unas concavidades iguales y semejantes al filete de la rosca; por manera que se puede considerar la tuer-

ca

Fig. ca como el molde del filete de la rosca.

535 Sirve la rosca con su tuerca para comprimir los cuerpos, y algunas veces tambien para levantar pesos. El efecto viene á ser el mismo en ambos casos. La potencia *Q* que mueve la máquina, se aplica por lo regular á una barra que atraviesa la rosca ó la tuerca, y la una de estas dos piezas es mobil, y la otra inmobil. Como la potencia obra siempre de un mismo modo, quando está fija la rosca, y la tuerca mobil, ó quando es mobil la rosca y la tuerca inmobil, bastará considerar el uno de estos dos casos.

230. 536 Estando asegurada, y en situacion vertical la rosca *KH*; concibamos que no hay rozamiento, y que queda libre la tuerca para obedecer el impulso de su gravedad. Es evidente que andará, dando vueltas, todos los filetes inferiores de la rosca, resbalando por cada uno de ellos como por una superficie inclinada. Es tambien evidente que se podrá contrarrestar este impulso, aplicándola á la tuerca *MN* una potencia, que podremos suponer, si queremos, dirigida de muchos modos distintos. Pero como se echa de ver que se quedará sin movimiento alguno la tuerca solo con estorvar que dé vueltas, nos ceñiremos á buscar que razon ha de haber entre el peso de la tuerca, ó en general, entre la fuerza que la impeliere para moverla paralelamente al ege de la rosca, y la fuerza que puede detenerla estorvándola el dar vueltas. Consideremos primero solo uno de los puntos de la tuerca que descansa sobre uno de los puntos del filete de la rosca.

La

La fuerza que obra inmediatamente en dicho punto Fig.
para impedirle el dar vueltas, y la que le impele para que baje paralelamente al ege de la rosca, se han de considerar como que se ponen en equilibrio en un plano inclinado cuya altura es la misma que la del paso de la rosca, y la base es igual á la circunferencia cuyo radio es igual á la distancia que hay desde dicho punto al ege. Pero la una de estas dos fuerzas es paralela á la base del plano inclinado, y la otra la es perpendicular; luego hemos de concluir, en virtud de lo dicho (527), que la parte de fuerza paralela al ege de la rosca, que obra en un punto qualquiera del filete, es á la fuerza que se habría de aplicar inmediatamente en dicho punto para estorvarle dar vueltas, y en direccion contraria á su direccion, como la base de dicho plano inclinado es á su altura; esto es, como la circunferencia cuyo radio es igual á la distancia que hay entre dicho punto y el ege, es respecto de la altura del paso de la rosca. Luego si llamamos f la primera fuerza, t la segunda, r la distancia desde el punto que se considera al ege, b la altura del paso de la rosca, y suponemos que $1 : c$ espresa la razon entre el radio y la circunferencia, de lo que inferiremos ser rc la circunferencia cuyo radio es r, tendremos $f : t :: rc : b$.

Pero como no está sostenido inmediatamente cada uno de los puntos de la tuerca, y todo ello lo está por una potencia Q aplicada á un punto de la tuerca, entre cuyo punto y el ege hay una distancia que llamaré R; es constante que siendo R mayor que r, se necesitará respecto de

ca-

Fig. cada punto una parte de la fuerza Q tanto menor, quanto mayor fuere la distancia R; de suerte que si llamamos q la parte de dicha fuerza que puede obrar á la distancia R el mismo efecto que obra t á la distancia r, tendremos $t : q :: R : r$. Si multiplicamos esta proporcion por la primera, saldrá $f : q :: cRr : br :: cR : b$; cuya proporcion manifiesta que respecto de cada punto de la tuerca, que descansa sobre el filete de la rosca, hay siempre una misma razon entre la fuerza que le empuja paralelamente al ege de la rosca, y la que á una distancia dada R le estorva dar la vuelta, cuya razon es la de cR á b, y es cR la circunferencia que andaría la potencia Q si diese una vuelta. Inferamos, pues, que la suma de todas las fuerzas f que impelen la tuerca paralelamente al ege de la rosca, es á la suma de todas las fuerzas q necesarias para detenerla, quiero decir, que la fuerza total (que llamaré F) paralela al ege de la rosca, es á la fuerza Q que la ha de contrarrestar, como la circunferencia que andaría la potencia Q, es á la altura del paso de la rosca.

537 Luego tambien la fuerza que se habría de gastar paralelamente al ege de la rosca para contrarrestar la potencia Q que intentase hacer dar vueltas á la tuerca, ha de ser á dicha potencia Q, como la circunferencia que esta procura describir, es á la altura del paso de la rosca.

538 Luego en una misma rosca será tanto mayor el efecto de la potencia Q, quanto mas lejos del ege estuviere aplicada. Y en distintas roscas, estando á iguales distancias del

del ege las potencias, será tanto mayor su efecto, quanto menor fuere la altura del paso de la rosca. Quiero decir, que quanto mas inmediatas estuvieren las espiras de la rosca, tanta mas fuerza tendrá la potencia para comprimir en la direccion del ege. Fig.

539 Es, pues, la rosca, conforme se echa de ver, una máquina que participa de la palanca y del plano inclinado, y que sirve con mucha utilidad para comprimir los cuerpos. Pero lo que gana la potencia en esta máquina por razon de la fuerza, lo pierde por razon de la velocidad. Con efecto, para que ande la tuerca uno de los pasos de la rosca, es preciso que dé la potencia una vuelta entera.

Pero aunque esto sea un inconveniente no deja de tener su utilidad en algunas ocasiones. Quando se han de medir, por egemplo, las diferentes divisiones de un espacio muy corto *AB*, se puede conseguir haciendo que ande el espacio propuesto el estremo *E* de una rosca *DE* cuyos pasos sean muy iguales. Si en el otro estremo de la rosca hay una mano que, moviéndose con el mismo movimiento que la rosca, ande succesivamente las divisiones de una muestra que está atraviesa, se podrá, despues de haber esperimentado qué número de vueltas ha de dar la mano para que el punto *E* ande la longitud conocida *AB*, determinar por medio de las vueltas y porcion de vuelta que dicha mano habrá de dar para que el punto *E* ande una parte qualquiera de *AB*, la verdadera medida de dicha parte, por pequeña que sea. 232.

Pue-

Fig. 233. 540 Puede la rosca, aplicándola á las otras máquinas, aumentar mucho su efecto. Por egemplo, si la potencia Q aplicada á la cigueña $CDEQ$ hace dar vueltas á la rosca AB, cuyas espiras empujan los dientes de la rueda M, y la hacen dar vueltas; y esta arrastra consigo un cilindro, que con dar vueltas hace que se le enrosque la maroma KP; se determinará la razon entre la potencia Q y el peso P del modo siguiente.

Llamaremos L la fuerza que hace en el diente L el filete de la rosca, y tendremos $Q : L :: AB : \text{cir } DE$, en el supuesto de ser AB la altura del paso, y cir DE la circunferencia que andaría la potencia Q (536). La fuerza L es una potencia que, aplicada á la circunferencia de la rueda, obra contrá el peso; por esto tendremos (500) $L : P :: IK : IL$; luego si multiplicamos las dos proporciones, saldrá $Q : P :: AB \times IK : IL \times \text{cir } DE$, cuya proporcion manifiesta que tendrá Q tanto mayor ventaja, quanto menores fueren AB, y IK respecto de cir DE y de IL.

Esta máquina se llama *Rosca sin fin.*

Del Rozamiento en la Rosca.

541 Segun hemos dicho poco ha, se reduce la rosca al plano inclinado, por lo que, se calcula del mismo modo, con corta diferencia el rozamiento en ambas máquinas. Pero son por lo comun tan toscas las roscas, y padecen sus movimientos tantas irregularidades, que son como fuerzas distintas del rozamiento, que no es posible calcular con bastante precision

sion la potencia que se le debe aplicar, para poner en movimiento un peso dado, por cuyo motivo no nos detendremos en este particular. Fig.

De la Cuña.

542 La *Cuña ADECB* es un prisma triangular que 234. se introduce en una raja *IZR* yá empezada, ó en general, entre dos superficies, para hacer mayor la raja, ó apartar sus caras, ó finalmente para mantenerlas á una distancia determinada una de otra.

La teórica de la cuña considerada como instrumento cuyo oficio es rajar, está todavia muy imperfecta, y lo estará probablemente mucho tiempo. Como no hay cuerpo alguno que carezca de cierta flexibilidad, las partes de la raja que tocan las caras de la cuña, pueden apartarse mas, sin que por esto el punto *Z* donde remata la raja mude de lugar; de suerte que una parte de la fuerza aplicada á la cabeza *ADEC* de la cuña, solo sirve para torcer los dos pedazos que separa la raja, y la otra sirve para poner tirantes las fibras de la parte que no está encetada.

543 Si fueren inflexibles los pedazos *ZFG*, *ZKL*, y cediesen todas á un tiempo las fibras que unen las partes de lo que está por rajar; se podrian, quando están para romperse, considerar las cosas del modo siguiente. Se podria imaginar que está realmente rajado el cuerpo, y substituir en lugar de la resistencia de la parte *ZFGV*, y de la parte *ZKLX*, fuerzas aplicadas perpendicularmente á *VO* y

 XS,

Fig. *XS*, y á distancias iguales á aquellas donde obra la fuerza total de cada una de estas resistencias. Hecho esto, para averiguar la razon entre la fuerza *P*, y las dos resistencias *O* y *S* que oponen las dos partes que se quieren separar, se harán las consideraciones siguientes.

544 Para que la fuerza aplicada perpendicularmente á la cabeza de la cuña surta completo su efecto, es preciso que encuentre un apoyo firme en la base *VX*; y por consiguiente, si el cuerpo no estuviese asegurado, y no hubiera rozamiento, sería preciso que dicha fuerza encontrase perpendicularmente la base, si la base descansa en dicho plano. Si hubiese rozamiento, no será indispensable que sea perpendicular á la base; pero será preciso que la encuentre, y que el ángulo que con ella forme no sea menor que el ángulo del rozamiento, pues no concurriendo esta condicion, el cuerpo dará de espaldas. Si la base estuviere firmemente asegurada en un punto, será preciso que la fuerza perpendicular á la cabeza de la cuña, pase por el mismo punto. Supuestas estas condiciones, vamos á declarar cómo obra la accion de la fuerza *P*.

545 No puede la fuerza *P* comunicarse á las dos partes *ZFG*, *ZKL*, en el supuesto de que no haya rozamiento, á no ser que haya en su direccion por lo menos un punto P', desde el qual se pueda bajar una perpendicular á cada cara de la raja, que pase por alguno de los puntos donde la cara de la cuña toca la cara de la raja. Pero quando hay rozamiento no es precisa esta condicion; bas-

basta con que pueda haber en la direccion de la fuerza P, un punto P' desde el qual se puedan tirar dos lineas $P'R$, $P'I$ que pasen por los puntos de contacto, y que no hagan allí con las caras un ángulo menor que el del rozamiento. Con estas condiciones podrá la fuerza P comunicarse plenamente á las dos caras. Fig.

De lo que hemos dicho se infiere, que faltan muchos de los conocimientos indispensables para determinar las fuerzas que se requieren para separar las partes de un cuerpo. Contentémonos, pues, con conocer una especie de límite acerca de este punto, y determinemos la razon entre la potencia P, y cada una de las dos resistencias O y S, prescindiendo del rozamiento, y en el supuesto de que la base VX descansa sobre un plano.

546. Imaginaremos la fuerza P representada por $P'Q$, resuelta en otras dos, cuyas direcciones son las perpendiculares $P'N$, $P'M$ á las dos caras de la cuña. Estas dos fuerzas se esforzarán para hacer dar vueltas á las dos partes del cuerpo, la primera al rededor de V, la otra al rededor de X. Las resistencias O y S en direcciones opuestas, son las fuerzas que contrarrestan este movimiento de rotacion. Tirando, pues, las perpendiculares VY, XT, á $P'N$, $P'M$, consideraremos OVY y SXT como dos palancas angulares, cuyos apoyos están en V y X.

Sentado esto, si llamamos I la fuerza en la direccion $P'N$, tendremos $P : I :: P'Q : P'N$; pero una vez que, segun suponemos, es la fuerza P perpendicular á la cabeza de la

Fig. cuña, y son las dos fuerzas $P'N$, $P'M$ perpendiculares á sus caras, el triángulo $P'NQ$ es semejante al triángulo ABC, y tendremos $P'Q : P'N :: AC : AB$; luego $P : I :: AC : AB$. Si llamamos O la resistencia de la parte $ZFNV$, que pasa, segun suponemos, á la distancia VO, sacaremos de la propiedad de la palanca $I : O :: VO : VY$. Si multiplicamos estas dos proporciones, resultará $P : O :: AC \times VO : AB \times VY$. Y respecto de la otra cara, sacaríamos tambien $P : S :: AC \times XS : BC \times XT$.

547 Si estuviese el cuerpo asegurado, sería preciso atender á otros puntos; pero como á pesar de todo este cuidado, no adelantaríamos mas en esta materia, que está enlazada con conocimientos físicos de que carecemos, no nos detendremos mas en este asunto. Nos contentarémos con reparar que de la proporcion $P : O :: AC \times VO : AB \times VY$ se infiere que, en general, será tanto mayor el efecto de la cuña, quanto mas puntiaguda fuere, porque en este caso será AC tanto menor respecto de AB.

Del Rozamiento en la Cuña.

235. 548 Sea el triángulo isósceles ACB, el perfil de una cuña cuyo destino es rajar un madero $MKHN$, aplicando en medio de su cabeza orizontal AB un peso P. Si llamamos x el peso que se le ha de añadir á P para vencer la resistencia que hallan las dos caras de la cuña rozando en los lados de la raja, tomaremos en la direccion del peso $P + x$ la parte EF para representarle, y resolveremos esta fuer-

za en otras dos EG, EL perpendiculares á las dos caras AC, BC. Cada una de las fuerzas EG, EL es igual á $(P+x)\times\frac{AC}{AB}$, y resultan en AC y AB dos rozamientos que debemos considerar como dos fuerzas que tienen las direcciones CA y CB; esprésolas por CV y CX, y concluyo el paralelogramo $VCXT$. Fig.

Sentado esto, llamo AB, a; AC, b; la razon entre el rozamiento y la presion n; será CV ó $CX = \frac{n(P+x)b}{a}$, y se sacará facilmente $CT = \frac{2n(P+x)\sqrt{(bb+\frac{1}{4}aa)}}{a}$.

Pero si suponemos que la parte RF de EF representa el peso añadido x, resultará que $RF = CT$, ó $x = \frac{2n(P+x)\sqrt{(bb+\frac{1}{4}aa)}}{a}$; luego $x = \frac{2nP\sqrt{(bb+\frac{1}{4}aa)}}{a-2n\sqrt{(bb+\frac{1}{4}aa)}}$.

Aunque en la práctica no se hace uso de peso alguno, sino de la fuerza de la percusion, que es infinitamente mas eficaz para rajar el madero MH, no por esto varía el modo de valuar el rozamiento.

De la Rigidez de las Maromas.

549 Es constante que es tanto mas tiesa una cuerda, ó cuesta tanto mas trabajo el doblarla: 1.° quanto mayor es la fuerza ó el peso que la tiene tirante. 2.° quanto mas gruesa es. 3.° quanto menor es el diámetro del rodillo en que se enrosca.

Fig. No está averiguada con bastante precision la ley que siguen estos elementos, la tension de la cuerda, su diámetro, y el diámetro del rodillo para producir la rigidez; pero podemos suponer (y concuerda bastante con la esperiencia este supuesto) que *la rigidez está en razon compuesta de la directa del peso que tira la cuerda, del diámetro de la misma cuerda, y de la inversa del diámetro del rodillo al rededor del qual se enrosca la cuerda.* Supone esta regla que las diferentes cuerdas, cuya rigidez se quiere comparar, son de la misma especie, quiero decir igualmente nuevas, igualmente retorcidas &c.

No hay duda en que la mayor ó menor velocidad con que se enrosca una cuerda, puede influir en su rigidez; pero como aquí solo consideramos los movimientos al empezarse, poco nos importa atender á la velocidad.

550 Entre los diferentes medios que se pueden usar para esperimentar la rigidez de las maromas, el siguiente me parece el mas sencillo y el mas exacto.

236. Sean *OCM*, *VDN* dos rodillos ó dos poleas móbiles
237. al rededor de sus eges, á los quales están aplicados respectivamente los dos pesos *P* y *Q*, *R* y *S* por medio de dos cuerdas de distintos diámetros. Los dos pesos *P* y *Q* son iguales entre sí, y lo son tambien los dos pesos *R* y *S*. Supongamos que para alterar el equilibrio, ó vencer el rozamiento y la rigidez de las cuerdas, se le haya de añadir al peso *P* un peso chico conocido *p*, y al peso *R* otro peso pequeño conocido *r*. Hemos de hallar directamente que parte

te de los pesos añadidos p y r son el rozamiento y la rigidez de las cuerdas. Fig.

Sean

El radio del ege de la polea *OCM*	=	a
El radio de la misma polea	=	b
El radio de la cuerda *PCQ*	=	c
El radio del ege de la polea *VDN*	=	l
El radio de la misma polea	=	m
El radio de la cuerda *RDS*	=	b
La parte del peso p, que contrarresta el rozamiento	=	x
La parte del mismo peso p, que vence la rigidez de la cuerda *PCQ*	=	y
La parte del peso r, que vence el rozamiento	=	z
La parte del mismo peso r, que contrarresta la rigidez de la cuerda *RDS*	=	u
La razon del rozamiento á la presion	=	n

Hemos de determinar las cinco incógnitas x, y, z, u, n. Por de contado

1.° Tenemos como es evidente

$$(A).\ x + y = p$$

$$(B)\ z + u = r.$$

2.° Como la presion total en el ege de la polea *OCM* es en el caso actual $2P + p$, es evidente que tendremos

$$(C)\ bx = n(2P + p)a.$$

Del mismo modo tendremos

$$(D).\ mz = n(2R + r)l.$$

Fig. 3.° De la hypótesis que seguimos acerca de la rigidez de las cuerdas, inferiremos $y : u :: \frac{(2P+p)\times c}{b} : \frac{(2R+r)\times h}{m}$; de cuya proporcion sacamos

$$(E)\ bh(2R+r)y = mc(2P+p)u.$$

Si comparamos unas con otras las cinco equaciones (A), (B), (C), (D), (E) hallaremos

$$x = \frac{p(2R+r)bha - r(2P+p)cma}{(2R+r)(bah - ocl)}$$

$$y = \frac{r(2P+p)cma - p(2R+r)bcl}{(2R+r)(bah - bcl)}$$

$$z = \frac{p(2R+r)bhl - r(2P+p)cml}{(2P+p)(amh - cml)}.$$

$$u = \frac{r(2P+p)amh - p(2R+r)bhl}{(2P+p)(amh - cml)}$$

$$n = \frac{p(2R+r)bh - r(2P+p)cm}{(2P+p).(2R+r).(ab - cl)}.$$

551. Podrian estas fórmulas dar que hacer á algunos lectores en el caso de ser los radios de los eges proporcionales á los de las cuerdas, ó quando $ab = cl$; porque como en este caso $ab - cl = 0$, $bab - bcl = 0$, $amb - mcl = 0$, parece á primera vista que serían infinitos los valores de x, y, z, u, n que acabamos de sacar.

Pero se ha de considerar que en el espresado supuesto de ser los radios de los eges proporcionales á los de las cuerdas, se reducen á cero los numeradores y los denominadores de los quebrados propuestos, por lo que siempre espresan cantidades finitas.

Con efecto, las equaciones (C) y (D) dán $x : z :: am(2P + p) : bl(2R + r)$, ó $\frac{x}{am} : \frac{z}{bl} :: 2P + p : 2R + r$; y la equa-

equacion (*E*) dá $y : u :: \frac{c(2P+p)}{b} : \frac{h(2R+r)}{m}$, ó $\frac{by}{c} : \frac{mu}{h} :: 2P + p : 2R + r$; luego $\frac{x}{am} : \frac{z}{bl} :: \frac{by}{c} : \frac{mu}{h}$; ó $x : z :: \frac{ay}{c} : \frac{lu}{h}$, ó (porque, segun se supone, $\frac{a}{c} = \frac{l}{h}$) $x : z :: y : u$; luego $x + y : z + u :: x : z$, ó $p : r :: x : z :: am(2P + p) : bl(2R + r)$; luego $p(2R + r)bl = r(2P + p)am$; ó substituyendo en lugar de l su valor $\frac{ah}{c}$, $p(2R + r)\frac{bah}{c} = r(2P + p)am$; ó tambien $p(2R + r)bba = r(2P + p)cma$. Del mismo modo hallaríamos $p(2R + r)bbl = r(2P + p)cml$; $r(2P + p)amb = p(2R + r)bbl$; $p(2R + r)bb = r(2P + p)cm$. Por consiguiente, quando son cero los denominadores de los valores de x, y, z, u, n, lo son tambien sus numeradores; luego no son ni infinitos, ni cero, sino finitos, y se determinan del modo siguiente. Fig.

Una vez que tenemos $x + y : z + u :: x : z$, ó $p : r :: x : z$, y $y : u :: am(2P + p) : bl(2R + r)$, tenemos, para hallar las quatro incógnitas x, y, z, u, las quatro equaciones $x + y = p$, $z + u = r$, $pz = rx$, $ybl(2R + r) = uam(2P + p)$.

Pero si suponemos $x = \frac{p}{t}$ (siendo t un número qualquiera positivo mayor que la unidad), $z = \frac{r}{t}$, y por consiguiente $y = p - \frac{p}{t}$, $u = r - \frac{r}{t}$, es evidente que satisfarán estos quatro valores á las quatro equaciones precedentes. Se echa, pues, de ver que en este caso particular es indeterminada la cuestion, y que no es posible determinar, cómo en la hypótesis general, por medio de las equaciones mismas, los rozamientos, y las rigideces de las cuerdas; pero se deben considerar como conocidos los valores de los roza-

mien-

Fig. mientos para hallar el de las rigideces, ó los valores de las rigideces para inferir el de los rozamientos.

552 Concuerdan bastante con los cálculos antecedentes todos los esperimentos que se han podido hacer para averiguar la rigidez de diferentes cuerdas. Contentaréme con referir solo uno, que bastará para hacer patente el modo de aplicar en la práctica las fórmulas generales á cada caso particular.

Se colgó muy á plomo una polea muy ligera, cuyo diámetro era de 10 pulg. 6 $\frac{1}{6}$ lin. Atravesábala perpendicularmente un ege de box de 8 lineas de diámetro, y daba vueltas con mucha libertad sobre los apoyos de este ege. Tomáronse dos cuerdas nuevas poco retorcidas, la una de 9 lin. de diámetro, y la otra de 13, y aplicando succesivamente estas dos cuerdas á la polea, atando en ambos casos á cada uno de los dos cabos de la cuerda un peso de 100 libras y 12 onzas, se halló que para hacer bajar uno de los pesos, ó para vencer el rozamiento y la rigidez de la cuerda, era menester añadir un peso de 6 libras, quando se hacia la prueba con la cuerda de menor diámetro, y un peso de 7 libras 8 onzas, quando se hacia con la cuerda mas gruesa.

En el supuesto de que obra la accion de la cuerda en la direccion de su ege, es evidente que quando se egecuta el esperimento con la cuerda de menor diámetro, hemos de considerar que el diámetro de esta polea es de 11 pulg. 3 $\frac{1}{2}$ l. y de 11 pulg. 7 $\frac{1}{2}$ l. quando sirve la cuerda gruesa. Tendremos, pues, en este caso $P = R =$ 100 libras 12 onzas

=

$= 100\frac{3}{4}$ libras, $p = 6$ libras, $r = 7$ libras 8 onzas $= 7\frac{1}{2}$ Fig.
libras, $2P + p = 207\frac{1}{2}$ libras, $2R + r = 209$ libras, $2a = 2l = 8$ lin. $2b = 11$ pulg. $3\frac{1}{2}$ lin. $= 135,5$ lin. $2m = 11$, pulg. $7\frac{1}{2}$ lin. $= 139, 5$ lin. $2c = 9$ lin. $2b = 13$ lineas. Substituyendo en las fórmulas (550) en lugar de las letras sus valores, resultará $x = 2\frac{227945}{906224}$ lib, $y = 3\frac{678279}{906224}$ lib, $z = 2\frac{10638673287}{52463572920}$ lib, $u = 5\frac{15593113173}{52463572920}$ lib, $n = \frac{552946503}{3008663680}$.

Cuyos valores manifiestan que para contrarrestar el rozamiento, se necesita en ambos casos un peso de un poco mas de 2 libras, y que la rigidez de la cuerda delgada equivale á un peso de un poco menos de 4 libras, y la de la cuerda gruesa á un peso de un poco mas de 5 libras. Tambien es patente que el rozamiento excede muy poco la sexta parte de la presion.

553. Si combinamos estas nociones acerca de la rigidez de las maromas con los principios que llevamos sentados acerca del rozamiento, podremos determinar la fuerza que se la ha de aplicar á una máquina propuesta para sacarla del estado de equilibrio.

Propondremos dos egemplos para enseñar el camino. 238.
En el primero servirán las poleas de que se habló antes (497).

Sean
- El radio de cada ege .... $= a$
- El radio de cada polea, incluso el de la cuerda $= b$
- El radio de cada cuerda .... $= c$
- La fuerza que se la ha de añadir á la tension

del

Fig.

Sean:

del cordon 2, para vencer á un mismo tiempo el rozamiento y la rigidez de la cuerda .... $= x$

La tension total del cordon 2 .... $= X$

La fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 4, para contrarrestar el rozamiento y la rigidez de la cuerda .... $= y$

La tension total del mismo cordon 4 ...... $= Y$

La fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 6, para vencer el rozamiento y la rigidez de la cuerda .... $= z$

La tension total del mismo cordon .... $= Z$

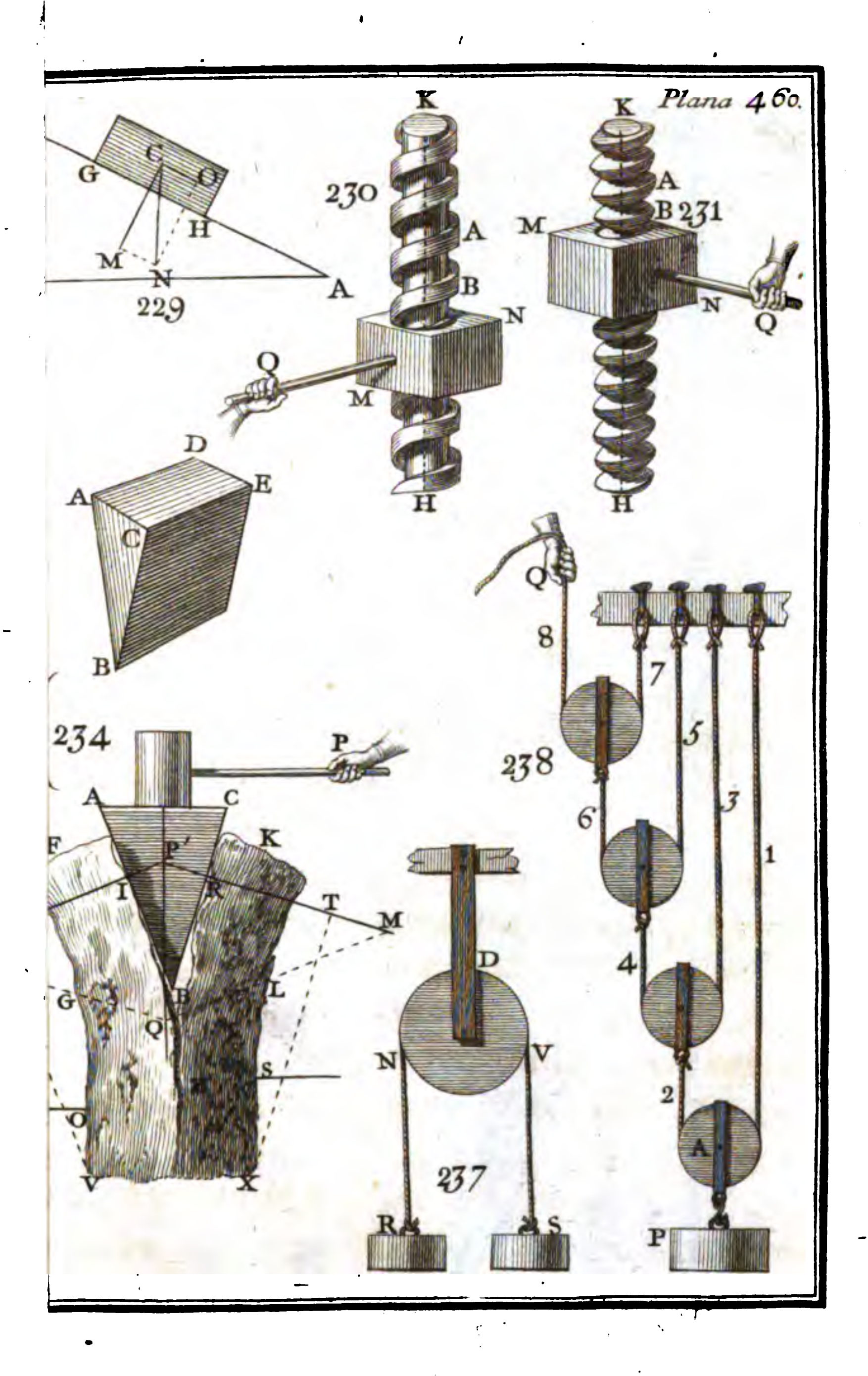
La fuerza que se le ha de añadir á la tension del cordon 8, para vencer el rozamiento y la rigidez de la cuerda............. $= u$

La tension del mismo cordon, ó la potencia que se busca.................... $= V$

La razon entre el rozamiento y la presion ... $= n$

Supongamos á mas de esto que una cuerda cuyo radio es b, con una presion conocida que llamo N, enroscándose al rededor de una polea cuyo radio junto con el de la cuerda es m, tenga una rigidez igual á un peso q. Las cantidades b, N, m, q son conocidas por el esperimento referido (552).

Sentado esto, es evidente que la presion total que padece el ege de la polea A es $P + x$, y el rozamiento $n(P + x)$. Es tambien evidente que si formamos esta proporpor-


Plana 46o.
229
G C O H M N A
230
K A B N Q M H
231
K A B M N Q H
D A E C B
234
A C P F K P' I R T M G B L Q S O V X
237
D N V R S
238
Q 8 7 5 6 3 1 4 2 A P

porcion $\frac{Nh}{m} : q :: \frac{(P+x)c}{b}$: un quarto término; este quarto Fig. término $\frac{qmc(P+x)}{Nbh}$ será la espresion de la rigidez de la cuerda aplicada á la polea *A*.

Se echa de ver que las dos fuerzas x y $\frac{qmc(P+x)}{Nbh}$ obran en el estremo del radio de la polea, siendo así que la fuerza $n(P+x)$ obra en el estremo del radio del ege; y como pide la naturaleza del equilibrio, que el momento de la fuerza x sea igual á la suma de los momentos de las otras dos fuerzas, síguese que tendremos $bx = n(P+x)a + \frac{qmc(P+x)b}{Nbh}$, de donde sacaremos

$$x = \frac{naP + \frac{qmcP}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}; \text{ luego } X = \frac{P}{2} + \frac{naP + \frac{qmcP}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}.$$

Por el mismo camino hallaremos

$$y = \frac{naX + \frac{qmcX}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}, Y = \frac{X}{2} + \frac{naX + \frac{qmcX}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}};$$

$$z = \frac{naY + \frac{qmcY}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}, Z = \frac{Y}{2} + \frac{naY + \frac{qmcY}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}};$$

$$u = \frac{naZ + \frac{qmcZ}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}, V = \frac{Z}{2} + \frac{naZ + \frac{qmcZ}{Nh}}{b - na - \frac{qmc}{Nh}}.$$

Supongamos, por egemplo, que el peso P sea de 800 libras, el radio del ege de 8 lineas, el radio de la polea de 4 pulgadas, ó 48 lineas, el radio de la cuerda de 6 lineas. Sigamos la hypótesis de que sea el rozamiento $\frac{1}{5}$ de la presion, y que una cuerda de 9 lineas de diámetro, con una

Fig. una presion de 208 libras, doblándose al rededor de una polea de 11 pulg. $3\frac{1}{2}$ lineas de diámetro, tenga una rigidez equivalente á un peso de 4 lib. en número entero. Tendremos $P = 800$ lib. $a = 8$ lineas, $b = 48$ lineas, $c = 6$ lineas, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{qm}{Nh} = \frac{4 \times (135,5)}{208 \times 9} = \frac{4 \times 1355}{208 \times 90} = \frac{271}{936}$, $\frac{qmc}{Nh} = \frac{271}{156}$ lineas. Por consiguiente (omitiendo los quebrados que no harian mas que enredar el cálculo sin darle mas precision), tendremos $X = 460$ lib. $Y = 264$ lib. $Z = 152$ lib. $V = 87$ lib.

Hallamos (497) en el mismo egemplo que por razon de solo el rozamiento debería ser la potencia de 65 libras. Pide, pues, la rigidez de las cuerdas que sea la potencia 22 libras mas; y todo considerado, llega á ser esta potencia de cerca de 87 libras, siendo así que no hubiera sido mas que de 50, si no hubiese rozamiento, ni fuesen rígidas las maromas.

239. 554 Servirá de segùndo egemplo una grua á propósito para levantar piedras, ó fardos muy pesados.

En esta máquina el peso P está colgado de una polea a, por la qual pasa una cuerda cuya parte 1 está atada á un garfio fijo; la otra parte pasa por encima de la polea b, de la polea c, y vá á enroscarse al rededor del cilindro OF. Una potencia Q aplicada á la circunferencia de la rueda QN está para hacer subir el cuerpo P en venciendo su gravedad, el rozamiento y la rigidez de la cuerda. Para sostener la cuerda en el intervalo bc se han puesto en d y e dos pequeños rodillos, que por ser muy móbiles sus eges,

y

y no padecer mas que una muy leve presion, no pueden ocasionar sino un rozamiento insensible, y por lo mismo despreciable. Llamaremos, pues, en general Fig.

El radio del ege de cada una de las tres poleas a, b, c . . . . a

El radio de cada una de dichas poleas, incluso el de la cuerda . . . . b

El radio de la cuerda c

El radio de los morriones del cilindro . . . . f

El radio del cilindro, incluso el de la cuerda . . g

El radio de la rueda . . . . k

La fuerza que se ha de añadir á la tension 2, para vencer á un tiempo el rozamiento y la rigidez de la cuerda x

La tension total del mismo cordon X

La fuerza que se ha de añadir á la tension del cordon 3, para superar á un tiempo el rozamiento y la rigidez de la cuerda . . . . y

La tension total del mismo cordon . . . . Y

La fuerza que se ha de añadir á la tension del cordon 4, para superar á un tiempo el rozamiento y la rigidez de la cuerda . . . . z

La tension total del mismo cordon . . . . Z

La razon entre el rozamiento y la presion . . . . . n

Suponemos á mas de esto que una cuerda cuyo radio es b, padeciendo una presion conocida que llamaremos N, y do-

Fig. doblándose al rededor de una polea cuyo radío junto con el de la cuerda es m, tenga una rigidez igual á un peso q. Estas cantidades b, N, q, m son conocidas por el esperimento (552).

Sentado esto, 1.° se echa de ver (497) que siendo mobil la polea a, y siendo verticales los dos cordones 1, y 2, á lo menos sensiblemente, el rozamiento del ege de dicha polea es nP. Y como este rozamiento tiene por brazo de palanca el radio del ege, mientras la fuerza destinada para vencerle, y aplicada al cordon 2, tiene por brazo de palanca el radío de la polea; se sigue que lá espresion de la última fuerza es $\frac{nPa}{b}$. A mas de esto, se ha de considerar que con hacer esta proporcion $\frac{Nh}{m} : q :: \frac{Pc}{b}$: á un quarto término, este quarto término $\frac{qmcP}{bhN}$ espresaría la rigidez de la cuerda (549) aplicada á la polea a, si esta fuese inmobil. Pero como es mobil, y como en el instante que se halla un poco levantada por la fuerza aplicada al cordon 2, se hace en el punto i de la cuerda un pequeño movimiento angular; parece que ha de costar, para doblar la cuerda, con corta diferencia, el mismo trabajo que si se la doblára sobre una polea fija cuyo radio fuese igual al diámetro de la polea a. Por consiguiente, su rigidez será representada, á lo menos sensiblemente, por $\frac{qmcP}{2bhN}$. Esta fuerza, junta con la del rozamiento, ha de ser igual con x; de donde sacaremos $x = \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN}$. Luego por ser $X = \frac{P}{2} + x$, tendremos $X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN}$, ó $X = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{2na}{b} + \frac{qmc}{bhN}\right)$.

2.° Si respecto de la polea fija b no hubiese, ni roza-

zamiento ni rigidez de cuerda que superar, los dos cordones 2 y 3 estarían igualmente tirantes en virtud de una fuerza cuya espresion es X; y es evidente que por ser estos cordones, por lo menos sensiblemente, el uno vertical, y el otro orizontal, en virtud de sus tensiones resultaría contra los apoyos de los eges de dicha polea una presion cuya espresion sería $X\sqrt{2}$. Pero aquí la espresion rigurosa de la presion es $\sqrt{(X^2 + Y^2)}$. No obstante, como Y no discrepa mucho de X, y con suponer estas dos cantidades iguales entre sí, el cálculo sale menos complicado, tomarémos $X\sqrt{2}$ por el valor aproximado de la presion. Así, en la polea fija b, la espresion del rozamiento será $nX\sqrt{2}$, y la de la rigidez de la maroma será $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Como el rozamiento tiene por brazo de palanca el radio del ege, mientras la fuerza que le ha de vencer, que está aplicada al cordon 3, tiene por brazo de palanca el radio de la polea; es evidente que el valor de esta última fuerza es $\frac{naX\sqrt{2}}{b}$. Juntémosle con la rigidez $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$, y sacarémos una suma que ha de ser igual con y; de donde resultará $y = \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Luego por ser $Y = X + y$, tendremos $Y = X + \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$, ó $Y = X\left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right)$. Fig.

3.° Discurriendo respecto de la polea c, del mismo modo puntualmente que respecto de la polea b, sacaremos $Z = Y\left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right)$.

Ahora bien, la potencia Q ha de formar equilibrio con la tension Z, con el rozamiento de los eges del cilindro, y con la rigidez de la cuerda que se enrosca al rededor del

Fig. cilindro. Supongamos que la potencia Q obre verticalmente de arriba abajo; como la resistencia Z obra tambien verticalmente, pero de abajo arriba, es evidente que la presion de los morriones es $Z - Q$; y que por consiguiente el valor del rozamiento será $n(Z - Q)$. Este rozamiento tiene por brazo de palanca el radio de los morriones del cilindro; supongamos que para vencerle se haga uso de una fuerza aplicada al estremo del radio del cilindro; es evidente que esta fuerza será $\frac{nf(Z-Q)}{g}$. En quanto al trabajo que ha de costar para que se enrosque la cuerda al rededor del cilindro, observarémos para determinarla, que en consecuencia del modo con que hemos introducido arriba la tension de una cuerda que pasa por encima de una polea, y que está cargada de dos pesos, en la espresion de su rigidez, hemos de considerar aquí nuestra cuerda, como si estuviera cargada de dos pesos cada uno de los quales está espresado por Z; de donde se sigue (549) que la espresion de la rigidez de la misma cuerda será $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Tenemos, pues, ahora tres fuerzas que obran en el estremo del radio del cilindro; es á saber, Z, $\frac{nf(Z-Q)}{g}$, $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Estas tres fuerzas han de hacer equilibrio con la potencia Q que obra en el estremo del radio de la cuerda. Luego tendremos (504) $Q \times k = Z \times g + \frac{nf(Z-Q)}{g} \times g + \frac{2qmcZ}{ghN} \times g$; de donde se saca $Q = \frac{Z}{k+nf} \times \left(g + nf + \frac{2qmc}{hN}\right)$.

Como todo es conocido ó facil de conocer en el segundo miembro, será tambien conocida Q.

Supongamos, por egemplo que el peso $P = 10000$ li-

librasj el radio del ege de cada polea $=9$ lineas; el radio del ege de cada polea, incluso el de la cuerda, $=9$ pulg; el radio de la cuerda $=15$ lineas; el radio de los morriones del cilindro $=9$ lineas; el radio del cilindro, incluso el de la cuerda $=6$ pulg; el radio de la rueda $=6$ pies. A mas de esto, supongamos que el rozamiento sea $\frac{1}{5}$ de la presion, y que una cuerda de 9 lineas de diámetro, padeciendo una presion de 208 libras, doblándose sobre una polea de 11 pulg. $3\frac{1}{2}$ lineas de diámetro, tenga una rigidez equivalente á un peso de 4 libras; cuyos supuestos concuerdan con el esperimento (552), con muy corta diferencia. Será, pues, $P=10000$ libras; $a=9$ lin. $b=9$ pulg. $c=15$ lin. $f=9$ lin. $q=6$ pulg. $k=6$ pies; $n=\frac{1}{5}$; $b=4,5$ lin. $m=67,75$ lin. $N=208$ lib, $q=4$ lib. En consecuencia de estos datos sacaremos, con calcular las decimales hasta las milésimas no mas, $\frac{mq}{hN}=\frac{271}{936}$, $\frac{2na}{b}+\frac{cmq}{bhN}=0,073$; $\frac{na\sqrt{2}}{b}+\frac{cmq\sqrt{2}}{bhN}=0,071$; $\frac{g}{k+f}=0,072$, $\frac{nf+\frac{2cmq}{hN}}{k+fn}=0,012$, y tendremos por lo mismo, con cortísima diferencia, $X=5365$ lib, $Y=5745,916$ lib. $Z=6153,875$ lib; $Q=516,926$ lib.

Así, la potencia Q precisa para empezar á mover el peso P, será de cerca de 517 libras. Si no fuera por el rozamiento y la rigidez de la cuerda, la potencia no sería mas que de cerca de 417 lib, conforme se puede inferir de las fórmulas precedentes, suponiendo que en los valores de X, Y, Z, Q, sea $n=0$, $q=0$. Es de reparar que

Fig.

Fig. el rozamiento y la rigidez de la cuerda piden una potencia mas considerable. Es, pues, importante no omitir estas dos circunstancias quando se quiere valuar con cierta precision el efecto de una máquina.

En las poleas *b* y *c* la cuerda no abraza un semicírculo entero; esto disminuye un tantico su rigidez. Pero tambien hemos despreciado algunas cosillas al valuar las presiones que padecen los apoyos de los eges de dichas poleas; de donde resulta una especie de compensacion. Por consiguiente los cálculos que hemos hecho no se apartan mucho de la verdad, á lo menos en los supuestos sobre que hemos caminado por lo tocante al rozamiento y á la rigidez de la cuerda, que son sus elementos.

Cómo se han de apreciar las fuerzas aplicadas á las máquinas.

555 Hemos dicho muchas veces, que la medida de una fuerza qualquiera es el producto de una masa determinada por la velocidad que dicha fuerza la puede comunicar. Ahora nos toca dar algunas esplicaciones acerca de la aplicacion de este principio, para medir las fuerzas que obran por medio de las máquinas.

Quando dos pesos iguales obran uno en otro por medio de una garrucha simple y fija; es preciso, conforme hemos probado, para que formen equilibrio, que sean iguales sus masas, y este equilibrio puede durar eternamente.

Pero si en vez de contrarrestar un peso con otro, se le con-

contrarresta con la fuerza de un animal, con la de un hombre por egemplo; aunque es verdad que para el equilibrio este hombre no ha de gastar mas fuerza que la correspondiente al peso que ha de sostener, esto es, una fuerza igual á la cantidad de movimiento que resulta de la masa de dicho cuerpo, multiplicada por la velocidad que la pesantez le comunica en un instante; se echa de ver que si dicho hombre no tuviera mas fuerza que esta, el equilibrio solo duraría un instante; porque al segundo instante la pesantez repite el impulso que le dió al peso, y se consumió en el primer instante. Fig.

Luego no basta atender á la masa que un hombre sostiene, para formar juicio de su fuerza; se ha de atender tambien, en la medida de dicha fuerza, al número de veces que puede obrar una accion igual á la que obra cada instante la pesantez en el cuerpo. Pero si p representa la velocidad que la pesantez puede comunicar en un segundo de tiempo á un cuerpo libre; y dt una porcion infinitamente pequeña de un tiempo qualquiera t, será pdt (36) la velocidad que dá en el instante dt, suponiendo que t se cuenta por segundos. Luego si fuere M la masa que se ha de sostener, $Mpdt$ será su peso, ó la cantidad de movimiento que le comunica la pesantez cada instante dt; es, pues, esta la fuerza que habrá de hacer cada instante la potencia que hubiese de sostener la masa M, sea inmediatamente, sea por medio de una polea. Luego en un tiempo qualquiera t, dicha fuerza habrá consumido una cantidad

Fig. de movimiento igual á $S. Mpdt$, esto es, $= Mpt$. Luego si t espresa el tiempo al cabo del qual el agente no puede sostener la masa M, podremos considerar Mpt como la medida de su fuerza. No queremos dar á entender con esto que yá no podrá hacer mas fuerza; sino que habiendo llegado su fuerza á ser inferior al efecto que se ha de producir, se reputa entonces como nula respecto de dicho efecto. Supongamos, por egemplo, que para sostener un peso de 50 libras por espacio de una hora, haya de servir una potencia de quien se sepa que, obrando por grados iguales é infinitamente pequeños, puede dar á una masa de 20 libras una velocidad de 50 pies por segundo, en el instante que dicha potencia no pudiere mas; se echa de ver que entonces dicha masa de 20 libras tendría una cantidad de movimiento $= 20 \text{ lib} \times 50 = 1000$. Veamos, pues, si esta cantidad de movimiento es igual por lo menos á lo que es la cantidad Mpt, substituyendo en ella 50 libras en lugar de M; 1 hora, ó $3600''$ en lugar de t; y 30, 2 pies (50) en lugar de p; se viene á los ojos que falta mucho; luego dicha potencia no sostendría el peso de 50 libras por espacio de una hora. Si queremos averiguar qué tiempo ó número de segundos le sostendrá, lo conseguiremos con hacer $Mpt = 1000$; y substituyendo 50 en lugar de M, y 30, 2 pies en lugar de p, tendremos $t = \frac{1000}{50 \times 30{,}2} = \frac{1000}{1510} = \frac{100}{151} = \frac{2''}{3}$, con corta diferencia; quiero decir que dicha potencia no sostendría un peso de 50 libras, sino por espacio de $\frac{2}{3}$ de segundo, con corta diferencia.

Su-

556 Supongamos ahóra que se trate no solo de sostener la masa M un tiempo t, sino tambien de moverla todo el espresado tiempo con una velocidad uniforme y conocida, u. Fig.

Es evidente que el agente no puede haberle comunicado al mobil M, sea succesivamente, sea de repente, la velocidad u, sin haber gastado una cantidad de movimiento $= Mu$; y para mantener la velocidad u un tiempo t, ha tenido que luchar el mismo tiempo con la pesantez, del mismo modo que si el cuerpo hubiera estado en reposo; quiero decir (555) que ha tenido que gastar tambien una cantidad de movimiento $= Mpt$; luego para mantener el mobil M con la velocidad u en el tiempo t, es preciso que el agente sea capaz de producir una cantidad de movimiento $= Mu + Mpt$.

557 Consta por esperiencia que si se aplica un hombre á la cigueña Q de un torno, puede trabajar por espacio de 8 horas, y dar 30 vueltas por minuto á la cigueña, suponiendo 1.° que el radio del cilindro y de la cigueña sean iguales, y cada uno de 14 pulgadas. 2.° que el peso aplicado á la superficie del torno sea de 25 libras. Este esperimento determina el valor de $Mu + Mpt$, y por consiguiente hasta qué punto se puede contar con la fuerza de un hombre que mueve una máquina, y que ha de trabajar cierto tiempo. Con efecto, ya que el radio de la cigueña, y del cilindro son iguales, el peso anda en este caso el mismo camino que la potencia. Por con- 240.

Fig. siguiente, por ser dicho radio de 14 pulg. la potencia anda $28 \times \frac{22}{7}$ ó 88 pulg; y como dá 30 vueltas por minuto, anda, pues, cada segundo 44 pulg. ó $\frac{44}{12}$ de pie; quiero decir que la velocidad $u = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$. La masa $M = 25$ lib; $p = 30,2$ pies, y $t = 8^h = 28800.''$ Hechas las substituciones en $Mu + Mpt$, sale $Mu + Mpt = \frac{275}{3} + 21744000 = 21744092$. Este número dará á conocer si con la fuerza de un hombre se podrá esperar algun efecto propuesto. Por egemplo, si queremos saber si un hombre, aplicado á la misma máquina de que hemos hablado, podrá mover un peso de 60 libras con una velocidad de 10 pies por segundo, por espacio de 6 horas, hallarémos que esto no puede ser. Porque en este caso, $M = 60$ lib. $u = 10$; $p = 30,2$; $t = 21600''$; de cuyos supuestos sacaríamos $Mu + Mpt = 600 + 39139200 = 39139800$, que es mucho mayor que 21744092, y manifiesta que un hombre solo, trabajando continuamente por espacio de 6 horas, no puede producir el efecto espresado.

Conviene reparar de paso, que en los dos egemplos propuestos la velocidad u con la qual se supone que el hombre mueve el peso, influye poquísimo en la valuacion de la fuerza; pues en el primer egemplo, la cantidad de movimiento que corresponde á esta velocidad, es $\frac{275}{3}$; y 600 en el segundo; cuyas cantidades son muy pequeñas respecto de 21744000, y de 39139200. Así, aunque en el segundo egemplo no hay que esperar el efecto deseado, no es

por-

porque la velocidad ha de ser mayor que en el primer caso; sino porque la masa y el tiempo que se ha de mover, suponen en el valor de la potencia una cantidad de movimiento sobrado grande. Fig.

Luego mientras la velocidad con que el motor debe caminar, fuere pequeña respecto de *pt*, esto es, respecto de la que un cuerpo pesado adquiriría cayendo libremente todo el tiempo que se quiere que obre la fuerza, se podrá tomar simplemente por medida de la fuerza la cantidad *Mpt*, y será $Mpt = 21744000$. Y así, si la masa que se ha de mover, multiplicada por la velocidad que un cuerpo pesado adquiriría cayendo libremente todo el tiempo que la fuerza debe obrar, formase un producto menor que el número constante 21744000, ó muy poco mayor, se podrá considerar la fuerza como suficiente para el efecto propuesto, obrando la potencia como en los dos egemplos propuestos. Pero si la velocidad con que el peso ha de ser movido, es comparable con la que un cuerpo pesado adquiriría en el tiempo que ha de durar la accion de la fuerza motriz; entonces del número constante 21744000 se deberá restar la cantidad de movimiento *Mu*, correspondiente á la velocidad con la qual ha de ser movido el peso; y si el peso multiplicado por la velocidad que un cuerpo pesado adquiriría en el tiempo que se ha de mover la máquina, forma un producto menor que la resta que saliere, se podrá tener por suficiente la potencia.

Es de prevenir sin embargo que todo esto supone que un

Fig. un hombre obrando con cierta velocidad, es capaz del mismo efecto que quando obra lentamente; y esto es tanto menos natural quanto el hombre ha de obrar con mas velocidad. Pero á la esperiencia toca decidir qué número se ha de tomar entonces en lugar de 21744000. No por esto la medida de la fuerza dejará de ser $Mu + Mpt$; pero quando se hubiese determinado por medio de muchos esperimentos, un valor de $Mu + Mpt$, se podrá usar para todas las velocidades que discreparen poco de la velocidad correspondiente al esperimento; se podrá usar, conforme hemos visto que se debia usar el número 21744000, en los casos que hemos considerado.

558 En todo lo dicho hasta aquí hemos prescindido del rozamiento. Quando la máquina ha llegado á la uniformidad, que es el estado en que se han de considerar las máquinas, el efecto del rozamiento se ha de considerar como constante, y se le puede comparar con una nueva masa que se hubiese de mover con la masa propuesta. Así, en el mismo caso de arriba, suponiendo que el rozamiento equivale al peso de una parte conocida $\frac{n}{m}$ de la masa M, esta resistencia exigirá de parte de la potencia una cantidad de movimiento $= \frac{n}{m} Mpt$; por manera que $Mu + \frac{n}{m}Mpt + Mpt$, ó $Mu + \left(\frac{n}{m} + 1\right)Mpt$ será la medida de la fuerza motriz.

Aunque el Autor que trahe el esperimento citado (557) no hace mencion del efecto del rozamiento, hemos de creer que le incluye tácitamente en el resultado del esperimento. Por consiguiente, si suponemos que respecto de que el ege

ha

ha debido ser de un radio mucho menor que el del cilindro, Fig.
haya sido el rozamiento la dozava parte del peso, será preciso, despreciando Mu, como aquí es lícito, añadirle al número 2174000 su dozava parte; y entonces la fuerza de un hombre en iguales circunstancias ha de ser representada por el número 2355000. Se echa, pues, de ver que para poder apreciar con exactitud bastante la fuerza de un hombre, es preciso apreciar primero la razon entre la fuerza del rozamiento y la del peso, en el esperimento que se hiciere con la mira de determinar dicha fuerza. Entonces si fuere k el valor que el esperimento diere de $(\frac{n}{m}+1)Mpt$, será $(\frac{n}{m}+1)Mpt=k$, despreciando Mu; esto es, quando u es pequeña respecto de pt. Esta equacion servirá para formar juicio en otro supuesto qualquiera del valor de $\frac{n}{m}$, sobre si la fuerza de un hombre bastará para mover el peso M durante el tiempo propuesto t.

559 En todo lo que acabamos de decir, hemos mirado el agente como si obrase inmediatamente en el peso, y como si no sacase ventaja ninguna de las circunstancias locales, y de las máquinas. Por razon de muchas circunstancias se puede contar á menudo con un efecto mayor del que resultaría de solas las consideraciones que hemos propuesto. Por egemplo, en la polea un hombre puede añadir á su propia fuerza el peso de su cuerpo, ó mucha parte de dicho peso; y hay otras muchas máquinas y circunstancias en que puede hacer lo mismo. En muchos casos no es contínuo el movimiento, es como á brincos, como sucede en

la

Fig. la polea; y si se pierde algun tiempo, puede resultar tambien el beneficio de que por medio de los descansos alternativos, puede ser el agente mas tiempo capaz de la misma accion. No nos detendremos en hacer aplicaciones de esto, porque siempre será facil llevarlo en cuenta, teniendo presente lo que acabamos de decir, y particularmente acudiendo á los esperimentos, con tal que al tiempo de hacerlos, se procure separar lo que perteneciere á cada una de las causas de las quales pende la accion de la fuerza motriz.

Se dice muy comunmente que un hombre trabajando continuamente por espacio de 8 horas, no puede hacer sino una fuerza de 25 libras. Pero de lo dicho en este asunto se sigue que este modo de hablar no determina bastante quál es el valor de esta fuerza; sobre ser preciso atender á la velocidad con que dicho hombre obra, se ha de atender tambien al modo con que está aplicada su accion, y á otras muchas circunstancias cuya consideracion no cabe aquí. Es menester quando varían las circunstancias, acudir al cálculo despues de hechos los esperimentos quales los requieren dichas circunstancias.

560 Aunque solo hemos considerado el caso en que el peso hace esperimentar toda su resistencia á la potencia, es igualmente facil, en virtud de lo dicho acerca de la razon entre el peso y la potencia en cada máquina, determinar tambien si por medio de tal ó tal máquina, una potencia producirá un efecto propuesto. Por egemplo, en el torno, si el radio del cilindro es r, y el de la rueda, R; para que

el

el peso se mueva con la velocidad u, es menester que la potencia haya gastado una cantidad de movimiento $\frac{Mur}{R}$; y como en el tiempo t la accion de la pesantez comunica al cuerpo M la cantidad de movimiento Mpt, la potencia ha de gastar, para sostener esta fuerza, la cantidad de movimiento $\frac{Mptr}{R}$; finalmente, si el rozamiento equivale á la parte $\frac{n}{m}$ de la masa M suponiéndola aplicada á la distancia r, tendrá que gastar todavia la cantidad de movimiento $\frac{n}{m}\frac{Mptr}{R}$; por manera que para formar juicio sobre si la potencia podrá mover con la velocidad u, el tiempo t, la masa M en un torno cuyo cilindro tenga un radio $= r$, siendo R el de la rueda; será preciso determinar con algun esperimento el valor de $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right)\frac{Mptr}{R}$, aplicando á un torno de dimensiones y rozamiento conocidos un motor que mueva una masa conocida, y observando qué tiempo este motor puede continuar su accion; entonces si fuese k el valor que saliere despues de substituidos en lugar de M, u, r, R, $\frac{n}{m}$ y t los valores que estas cantidades tuvieren en el esperimento; será preciso que en otro caso qualquiera $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right)\frac{Mptr}{R}$ no tenga un valor mayor que k. Fig.

Asimismo, en el plano inclinado, quando tira la potencia paralelamente al plano con una velocidad u; si llamamos i la inclinacion del plano, Mpt sen i será (526) la cantidad de movimiento que la pesantez comunicará succesivamente al mobil en la direccion del plano en el tiempo t; por consiguiente la potencia habrá tenido que gastar una cantidad de movimiento $= Mu + Mpt$ sen i; y si el ro-

Fig. rozamiento fuese una parte $\frac{n}{m}$ del peso; habrá tenido que gastar una cantidad de movimiento $= Mu + Mpt$ sen $i + \frac{n}{m}Mpt$. Luego despues de determinado por esperiencia un valor de $Mu + Mpt$ sen $i + \frac{n}{m}Mpt$, será preciso, quando se quisiere determinar si la misma potencia podrá mover una masa determinada M con una velocidad v, en un tiempo conocido t, sobre un plano cuya inclinacion es i, y en el qual el rozamiento es una parte conocida del peso; será preciso ver si el valor que tendrá entonces $Mu + Mpt$ sen $i + \frac{n}{m}Mpt$ es menor, ó por lo menos igual con el del esperimento; entonces será posible lo que se pretende.

Si el tiempo t, que se ha de mover la máquina, no fuese dado; y se conociese el espacio que la potencia ó el peso ha de andar, por egemplo, el tiempo que el peso ha de andar con la velocidad u; como entonces se supone que el movimiento es uniforme, si llamamos E el espacio que se lleva animo de hacerle andar al peso, se substituiría en lugar de t su valor $\frac{E}{u}$ (20).

Esto es en sustancia lo que se ha de practicar para valuar las fuerzas aplicadas á las máquinas. Cada máquina puede empeñar en consideraciones peculiares atendida la naturaleza del agente, y el modo con que se le puede aplicar á la máquina. Pero siempre se deberá buscar la cantidad de movimiento que dicho agente ha de gastar, para saber si será capaz de un efecto propuesto; y darán mucha luz para conseguirlo los principios que acabamos de sentar.

RE-

RESOLUCION DE ALGUNAS CUESTIONES DE ESTÁTICA.

Fig.

561 AUnque se pueden resolver las cuestiones siguientes por principios que hemos sentado en diferentes lugares de este tratado, pende sin embargo la resolucion de algunas de ellas de ciertas consecuencias particulares que de dichos principios se pueden inferir. Como algunos de los lectores á cuyas manos irá á parar esta obra, tendrian trabajo en percibirlas y sacarlas, me parece del caso ahorrarles esta fatiga, repitiendo algo de lo que degé sentado atrás, á fin de poner lo que ahora nos hace falta mas inmediato á los principios de los quales se puede deducir.

562 Toda fuerza aceleratriz, y lo propio digo de toda fuerza retardatriz, es ó *absoluta* ó *simple*. La *Fuerza aceleratriz absoluta* es la que mueve una masa finita propuesta: la razon entre la fuerza aceleratriz y la masa, ó lo que viene á ser lo mismo, la fuerza aceleratriz que mueve la *unidad de masa*, se llama *Fuerza aceleratriz simple*; de donde se echa de ver que la fuerza aceleratriz absoluta es el producto de la fuerza aceleratriz simple por la masa del cuerpo. Por egemplo, quando un cuerpo cae libremente á impulsos de su pesantez, el peso absoluto de dicho cuerpo, ó la fuerza que impele toda su masa de arriba abajo, es su fuerza aceleratriz absoluta, y el peso particular de cada una de las moléculas elementales que le componen, es su fuer-

Fig. fuerza aceleratriz simple. Se suele llamar *Pesantez* ó *Gravedad* el peso particular de cada molécula elemental, por manera que el peso absoluto es el producto de la pesantez ó gravedad multiplicada por la masa.

Quando usáremos esta espresion *fuerza aceleratriz*, sin especificar si hablamos de la absoluta ó de la simple, entenderemos siempre la fuerza aceleratriz simple.

563 Hemos hallado (37) que el espacio andado por un cuerpo que se mueve con un movimiento uniformemente acelerado es igual á la mitad del producto del tiempo que dura el movimiento, multiplicado por la velocidad que adquiere; quiero decir que, llamando e dicho espacio, t el tiempo que dura el movimiento, y u la velocidad, es $e = \frac{ut}{2}$. Luego respecto de otro cuerpo que se moviese tambien con un movimiento uniformemente acelerado será $E = \frac{VT}{2}$, llamando respectivamente E, T, V el espacio, el tiempo, y la velocidad adquirida por dicho cuerpo. Por consiguiente $e : E :: \frac{ut}{2} : \frac{VT}{2} :: ut : VT$; esto quiere decir que, *quando dos cuerpos se mueven con movimientos uniformemente acelerados, los espacios que andan son entre sí, como los productos de las velocidades finales multiplicadas por los tiempos.*

564 Como toda fuerza aceleratriz obra por su naturaleza continuamente en el mobil, ó le dá, por decirlo así, succesivamente una infinidad de golpecitos, se sigue que el producto de la fuerza aceleratriz absoluta constante por lo que dura su aplicacion, es proporcional al producto de la ma-

masa del cuerpo por su velocidad final; porque el efecto de la fuerza aceleratriz absoluta constante, reiterada tantas veces quantos instantes hay en el tiempo, es la cantidad final de movimiento, esto es, el producto de la masa por la velocidad final. Podemos, pues, sentar estotro principio, que *quando dos cuerpos se mueven con movimientos uniformemente acelerados, los productos de las fuerzas aceleratrices absolutas por los tiempos que duran sus aplicaciones, son entre sí como los productos de las masas por las velocidades finales.* Fig.

565 Reduzcamos á fórmulas toda esta doctrina. Para cuyo fin sean dos cuerpos M y m que se mueven con movimientos uniformemente acelerados, y llamemos respectivamente F y f las fuerzas aceleratrices que los impelen; sus velocidades finales, V y v; los tiempos de sus movimientos, T y t; y los espacios andados, E y e.

1.° Tendremos (563) $E : e :: VT : vt$, de donde se saca la fórmula (D) $VTe = vtE$.

2.° Tendremos (564) $FT : ft :: MV : mv$; de donde sacaremos la fórmula (E) $FTmv = ftMV$.

3.° Con multiplicar la fórmula (D) por la fórmula (E), y dividirlo todo por Vv, sacaremos la fórmula (F) $FTTme = fttME$.

4.° Con multiplicar en cruz las dos fórmulas (D) y (E), y dividir por Tt, saldrá la fórmula (G) $FEmvv = feMVV$.

Ya hemos dicho (563 y 564) qué cosa significan las dos primeras fórmulas; las dos últimas significan que

Las fuerzas aceleratrices absolutas multiplicadas por

Fig. *los quadrados de los tiempos, son como los productos de las masas por los espacios andados.*

Las fuerzas aceleratrices absolutas multiplicadas por los espacios andados, son como los productos de las masas por los quadrados de las velocidades finales.

566 En las fórmulas (E), (F), (G) las letras F y f representan, conforme prevenimos espresamente, las fuerzas aceleratrices absolutas. Sean F' y f' respectivamente las fuerzas aceleratrices simples; tendremos (562) $F = F'M$, $f = f'm$.

Si substituimos en lugar de F y f sus valores, y dividimos cada miembro por Mm, sacaremos las tres fórmulas siguientes que espresan las relaciones entre las fuerzas aceleratrices simples (H) $F'Tv = f'tV$; (K) $F'TTe = f'ttE$; (L) $F'Evv = f'eVV$.

Todas estas fórmulas sirven para determinar las circunstancias de un movimiento uniformemente acelerado, quando se conocen las de un movimiento uniformemente acelerado, que se toma, digamoslo así, por escala de comparacion.

567 Hemos enseñado (52) como en el supuesto de que todo cuerpo grave anda 15, 1 pies en el primer segundo de su caida, se puede sacar qué espacio ha de andar en otro qualquiera número de segundos. En virtud de esto se ha formado la adjunta tabla que espresa los espacios que andará respectivamente un cuerpo grave en 2, 3, 4 &c. segundos, suponiendo que en el primero anda 15, 1 pies, cuyo supuesto discrepa muy poco de la verdad.

Tiem-

Tiempos de las caidas.	Espacios andados.		Tiempos de las caidas.	Espacios andados.		Tiempos de las caidas.	Espacios andados.	
Seg.dos	Pies.	Pulg.	Seg.dos	Pies.	Pulg.	Seg.dos	Pies.	Pulg.
0	00							
1	15	1	21	6651	9	41	25355	1
2	60	4	22	7300	4	42	26607	0
3	135	9	23	7979	1	43	27889	1
4	241	4	24	8688	0	44	29201	4
5	377	1	25	9427	1	45	30543	9
6	543	0	26	10196	4	46	31916	4
7	739	1	27	10995	9	47	33319	1
8	965	4	28	11825	4	48	34752	0
9	1221	9	29	12685	1	49	36215	1
10	1508	4	30	13575	0	50	37708	4
11	1825	1	31	14495	1	51	39231	9
12	2172	0	32	15445	4	52	40785	4
13	2549	1	33	16425	9	53	42369	1
14	2956	4	34	17436	4	54	43983	0
15	3393	9	35	18477	1	55	45626	1
16	3861	4	36	19548	0	56	47301	4
17	4359	1	37	20649	1	57	49005	9
18	4887	0	38	21780	4	58	50740	4
19	5445	1	39	22941	9	59	52505	1
20	6033	4	40	24133	4	60	54300	0

Fig. 568 Tambien hemos probado (38 y 563) que en el movimiento acelerado uniforme y continuamente, el espacio andado en un tiempo señalado es la mitad del espacio que puede andar el mobil en el mismo tiempo con la velocidad final ó adquirida, continuada uniformemente. Por consiguiente, si dobláramos todos los espacios que espresa la tabla antecedente, sacaríamos los espacios que un cuerpo andaría uniformemente con una velocidad igual á cada velocidad final, en el mismo tiempo que ha gastado para adquirir, cayendo, dicha velocidad final. Luego si dividimos dichos espacios, andados así uniformemente, por el número de segundos que el cuerpo ha gastado en adquirir, cayendo, cada velocidad final, sacarémos los espacios que un cuerpo andaría uniformemente en un segundo con una velocidad igual á dicha velocidad final. Estos últimos espacios están determinados en la tabla siguiente.

Tiem-

Tiempos que gasta un grave en adquirir cada velocidad.	Espacios uniformemente andados en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.		Tiempos que gasta un grave en adquirir cada velocidad.	Espacios uniformemente andados en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.		Tiempos que gasta un grave en adquirir cada velocidad.	Espacios uniformemente andados en un segundo en virtud de la velocidad adquirida.	
Seg.[dos]	*Pies.*	*Pulg.*	*Seg.*[dos]	*Pies.*	*Pulg.*	*Seg.*[dos]	*Pies.*	*Pulg.*
0	00	0						
1	30	2	21	633	6	41	1236	10
2	60	6	22	663	8	42	1267	0
3	90	8	23	693	10	43	1297	2
4	120	4	24	724	0	44	1327	4
5	150	10	25	754	2	45	1357	6
6	181	0	26	784	4	46	1387	8
7	211	2	27	814	6	47	1417	10
8	241	4	28	844	8	48	1448	0
9	271	6	29	874	10	49	1478	2
10	301	8	30	905	0	50	1508	4
11	331	10	31	935	2	51	1538	6
12	362	0	32	965	4	52	1568	8
13	392	2	33	995	6	53	1598	10
14	422	4	34	1025	8	54	1629	0
15	452	6	35	1055	10	55	1659	2
16	482	8	36	1086	0	56	1689	4
17	512	10	37	1116	2	57	1719	6
18	543	0	38	1146	4	58	1749	8
19	573	2	39	1176	6	59	1779	10
20	603	4	40	1206	8	60	1810	0

Fig. 569 Tambien hemos de satisfacer á la pregunta siguiente antes de empeñarnos en la resolucion de las cuestiones de Estática, á la qual se podría satisfacer en virtud de lo dicho (178) por ser como un caso particular de lo que allí enseñamos.

Supongamos que el cuerpo A *que se mueve en la direc-*
241. *cion* AK, *vaya á chocar perpendicularmente en* A *con el cuerpo* G *dividido en dos partes iguales por el plano* HRM; *se pregunta ¿quáles serán los movimientos de estos dos cuerpos despues del choque?* Suponemos ambos cuerpos perfectamente duros.

Supongamos que si no tropezára con el cuerpo G, el cuerpo A hubiese andado libremente en un instante el espacio infinitamente pequeño Aa; pero que por causa de la reaccion del cuerpo G, no ande mas que Ab. Supongamos tambien que el centro de gravedad G del cuerpo G ande el espacio infinitamente pequeño Gg paralelo á AK, y que al mismo tiempo dicho cuerpo G ande al rededor del ege GV trasladado á gu el ángulo infinitamente pequeño kgn. Sentado esto, es evidente que el movimiento perdido por el cuerpo A es $A \times ba$, y que el movimiento de traslacion ganado por el cuerpo G es $G \times Gg$; resultará, pues, en virtud de lo dicho (178), y de lo probado quando tratamos de la comunicacion del movimiento, la equacion (A) $A \times ba = G \times Gg$.

Si consideramos el punto G como inmobil, como podemos por lo dicho (178), es evidente que el mo-

men-

mento del movimiento perdido por el cuerpo *A* respecto Fig. del mismo punto es $A \times ba \times GK$. Este momento ha de ser igual al momento del movimiento ganado (213) por el cuerpo *G* dando vueltas al rededor del ege *GV* ó *gu*, porque estos dos movimientos se equilibran uno con otro. Pero si consideramos una molécula elemental qualquiera del cuerpo *G* puesta, por egemplo, en *zá* la distancia que se quisiere del ege *GV*, y suponemos que dicha molécula describe con el radio *Gz* el arco pequeño *zy*, mientras el punto *K* describe despues de llegado á *k*, el arco pequeño *kn* con el radio *gk* ó *GK*, es evidente que si representamos por *kn* la velocidad de rotacion del punto *k*, la velocidad de la molécula que consideramos será $\frac{kn}{gk} \times Gz$; por consiguiente, si llamamos *m* dicha molécula, el movimiento que adquiere al rededor del ege *GV*, será $m \times \frac{kn}{gk} \times Gz$, y el momento de este movimiento será $m \times \frac{gn}{gk} \times Gz \times Gz = m \times (Gz)^2 \times \frac{kn}{gk}$. Esta última espresion manifiesta que para hallar el momento del movimiento ganado por cada molécula, es menester multiplicar dicha molécula por el quadrado de su distancia al punto *G*, ó por mejor decir al ege *GV*; y multiplicar despues el producto por la fraccion $\frac{kn}{gk}$, que es siempre una misma en qualquiera parte que se tome la molécula. Luego ya que son tantos estos momentos particulares quantas son las moléculas que componen la masa *G*, y que el momento total del movimiento ganado por la masa *G*, al rededor del ege *GV*, es igual á la suma de los momentos de los movimientos ganados por todas las moléculas, se infiere que si llamamos *S* la

Fig. suma de los productos de las moléculas por los quadrados de sus distancias al ege GV, el momento del movimiento ganado por el cuerpo G, al rededor del ege GV, será $S \times \frac{kn}{gk}$. Tendremos, pues, esta segunda equacion (*B*) $A \times ba \times GK = S \times \frac{kn}{gk}$. Llamemos, pues, la linea conocida GK ó gk, a; la velocidad Aa del cuerpo A antes del choque, V; la velocidad Ab del mismo cuerpo despues del choque, x; la velocidad Gg del centro de gravedad G, u; la velocidad kn de rotacion del punto K ó k, z. Supongamos tambien, para que sean homogeneos todos los términos de nuestras equaciones, que pues S espresa el producto de una masa por el quadrado de una linea, sea $S = Mbb$, siendo M una masa dada por la figura del cuerpo, y b una linea tambien conocida.

Si substituímos en lugar de las lineas sus valores analýticos, las dos equaciones (*A*) y (*B*) se transformarán en (*C*) $A(V - x) = Gu$; (*D*) $A(V - x)a = \frac{Mbbz}{a}$.

Hay en estas equaciones tres incógnitas, es á saber x, u, z; pero hemos de considerar que mientras dura el choque, el cuerpo A se mantiene contiguo al cuerpo G; que por consiguiente será $Ab = Kn$, ó lo que viene á ser lo propio, tendremos esta tercera equacion (*E*) $x = u + z$.

Si comparamos unas con otras estas equaciones, y despejamos las incógnitas, sacaremos $x = \frac{(AGaa + AMbb)V}{AGaa + AMbb + GMbb}$, $u = \frac{AMbbV}{AGaa + AMbb + GMbb}$, $z = \frac{AGaaV}{AGaa + AMbb + GMbb}$. Por consiguiente, queda averiguado qual es la velocidad del cuerpo A despues del choque, la velocidad de traslacion del cuer-

po

po *G*, y la velocidad de rotacion del punto *k*, y por consiguiente la de otro punto qualquiera al rededor del ege *GV*. Fig.

570 Todo esto presupuesto, sea la que fuere la potencia que mueve una máquina, la fuerza que gasta cada instante es equivalente á un peso determinado. Así, la cuestion general que hemos de resolver consiste en determinar el movimiento que se la imprimirá á la máquina por medio de un peso dado, mayor que el que basta para mantener en equilibrio la carga que se quiere levantar, atendiendo, quando es menester, al movimiento, y á la rigidez de las cuerdas.

No hay duda en que considerando la fuerza motriz como un peso que supera las resistencias que hay que vencer, y que es una fuerza aceleratriz, cuya accion se repite continuamente, el movimiento de la máquina se irá acelerando mas y mas. Pero en la mayor parte de las máquinas dura solo un instante bastante corto está aceleracion, porque mengua la fuerza motriz, segun vá creciendo la velocidad; y porque muy pronto llega á ser no mas que lo que basta para hacer equilibrio con las resistencias opuestas. Entonces llega el movimiento á ser sensiblemente uniforme, y permanece en este estado en virtud de la inercia de la materia; todas las fuerzas que obran en la máquina se destruyen mutuamente. Esto se verifica principalmente en las máquinas que mueven los animales. Con efecto, es constante que un animal hace una fuerza tanto menor, quanto

mas

Fig. mas aprisa se le hace andar. Por egemplo, un hombre que, trabajando con sus brazos, puede hacer en el primer instante una fuerza de 50 á 60 libras, no hace mas que una fuerza de 25 á 26 libras, quando se mueve algun tiempo con una velocidad de 4 pies por segundo, cuya restriccion tiene lugar en los demás animales, guardando la proporcion correspondiente.

Como quiera, casi siempre se puede suponer que el peso motor permanece constante al principio del movimiento. Este supuesto que seguirémos, facilita determinar el movimiento que tendrá desde luego la máquina, y que conservará en adelante con diferencia de algunas cortas alteraciones. Si quisiéramos atender á la diminucion de la fuerza motriz, sería preciso empeñarnos en cálculos abstractos que no son para esta obra, y por otra parte está muy poco averiguada la ley que sigue esta diminucion. Por los mismos motivos prescindiremos de la velocidad en la valuacion del rozamiento y de la rigidez de las cuerdas; solo atenderemos en este cálculo á la simple presion, valuándola como conviene en el caso del movimiento. Finalmente, tampoco atenderemos al peso de las cuerdas, que en realidad es por lo comun de corta consideracion en comparacion de las cargas que se han de levantar, ó por lo menos (y esto es lo mas exacto) incluiremos el peso de cada parte de cuerda en el peso grande que sostiene, y considerarémos la suma como constante mientras duráre el movimiento, bien que padece esta suma una pequeña alteracion, segun se aro-

rollà ó desarrolla la cuerda. Aunque sea forzoso desembarazar de todas estas circunstancias las cuestiones siguientes, no dejarán de saiir sus resoluciones con una generalidad suficiente para los usos de la práctica. Fig.

571 Cuestion I. *Estando firmemente atado en el punto* A *de la palanca* ACF *perfectamente mobil al rededor del punto fijo* C *un cuerpo qualquiera sin pesantez, ó cuya pesantez esté sostenida por algun obstáculo; hallar la velocidad que comunicará á este cuerpo en un tiempo dado una fuerza constante, aplicada perpendicularmente en* F *á la palanca.* 242.

Llamo *F* la fuerza aplicada en *F*,* y *Q* la masa que se ha de mover (comprendiendo en esta masa la de la palanca, si fuere menester); es evidente que el momento de la fuerza *F*, que es $F \times CF$ ha de ser igual al momento del movimiento comunicado á la masa *Q* al rededor del ege *C* (213.). Pero si suponemos que pase en un instante la palanca de la situacion *FCA* á la situacion *fCa*, de suerte que un punto quàlquiera *A* del cuerpo propuesto describa el arco *Aa*; y si discurriendo ahora como discurrimos antes (569), para hallar el momento del movimiento comunicado al cuerpo *G* al rededor del ege *GV*, 241.
llamamos *Mbb* la suma de los productos de las moléculas del cuerpo *Q* por los quadrados de sus distancias al ege *C*, es evidente que la espresion del movimiento comunicado al cuer-

* Es de notar que puede la fuerza *F* no ser toda la fuerza de que es capaz el agente, y que es la parte de su fuerza absoluta que gasta contra la palanca.

Fig. cuerpo *Q* al rededor del ege *C*, será $Mbb \times \frac{Aa}{CA}$, y tendremos la equacion $F \times CF = Mbb \times \frac{Aa}{CA}$, ó $Aa = \frac{F \times CF \times CA}{Mbb}$.

Supongamos ahora que la fuerza *F* sea igual á un peso cuya masa $= N$; y llamando *g* la gravedad natural, tendremos $F = gN$, porque todo peso es igual al producto de su masa por la pesantez (562). Si suponemos á mas de esto, que el espacio *Aa* ha sido andado en un instante igual al que gasta la gravedad *g* en hacer correr á un cuerpo que cae libremente, un pequeño espacio que podemos representar por la misma letra *g*, es cierto que tambien podremos considerar *Aa* como la espresion de la fuerza aceleratriz que impele el punto *A* (conforme lo dá á entender la fórmula *K* (566)). Luego si hacemos esta fuerza aceleratriz $Aa = f$, $CA = a$, $CF = c$, tendremos $f = \frac{gNac}{Mbb}$.

Manifiesta esta equacion que el movimiento del punto *A* es uniformemente acelerado, pues la fuerza aceleratriz *f* es á la gravedad natural *g* en la razon constante de *Nac* á *Mbb*, y por consiguiente esta fuerza es tambien constante.

243. 572 Cuestion II. *Supongamos ahora que la masa* Q *que se ha de mover esté entregada á la accion de la pesantez, de modo que la palanca* FCA *dé vueltas en un plano vertical al rededor del punto fijo* C, *sin poderse escurrir; se pregunta ¿qué velocidad comunicará á todo el systema la fuerza* F, *aplicada siempre perpendicularmente en* F?

Sea *A* el centro de gravedad de toda la masa *Q*

que

que se quiere mover. Por el punto fijo C y por el punto A, Fig. imagínese la linea FCA que forma con la vertical CO un ángulo qualquiera ACO. Sirva la vertical AN para representar el peso absoluto del cuerpo Q, y resuélvase esta fuerza en otras dos, la una AR en la direccion de CA, la otra AM perpendicular á CA; es evidente que la primera fuerza AR queda destruida por la resistencia del punto C, y que no hay mas que la segunda AM que intente hacer dar vueltas á la palanca, y arrimarla á la vertical CO. Supongamos que pase en un instante la palanca de la situacion FCA á la situacion fCa, de modo que el punto A describa el pequeño arco Aa. Sentado esto, imaginemos que la fuerza F está dividida en dos partes x é y, tales que la primera x formaría continuamente equilibrio con la fuerza AM, y la segunda y sirve para hacer mover al rededor del punto fijo C, la masa Q considerada como destituida de pesantez. Es evidente que tendrémos desde luego la equacion (*A*) $x \times CF = AM \times CA$.

Si llamamos Mbb la suma de los productos de las moléculas del cuerpo Q por los quadrados de sus distancias al exe C, tendrémos (571) (*B*) $y \times CF = Mbb \times \frac{Aa}{CA}$.

Supongamos

La gravedad natural . . . . $= g$

La fuerza aceleratriz Aa del punto A . . . . $= f$

La fuerza motriz igual á un peso conocido cuya masa es N . . . . $= gN$

CA . . . . $= a$

Fig. CF .... $= c$
El seno total .... $= 1$
El seno del ángulo ACO .... $= q$

Se echa de ver al instante, que la fuerza $AM = gQ \times \frac{q}{1} = qgQ$. Por consiguiente las dos equaciones (A) y (B) se transformarán en $cx = qgQa$; $cy = \frac{Mbbf}{a}$; de donde se saca $x + y = \frac{qgQa}{c} + \frac{Mbbf}{ca}$; pero $x + y = F = gN$; luego $gN = \frac{qgQa}{c} + \frac{Mbbf}{ca}$. Luego $f = \frac{g(caN - qaaQ)}{Mbb}$.

Esta es la espresion de la fuerza aceleratriz del punto A. Como el numerador de este quebrado incluye el seno q del ángulo ACO que varía á medida que se mueve la palanca al rededor del punto C, se echa de ver que, suponiendo constantes todas las demás cantidades, no es constante la fuerza aceleratriz f, y que por consiguiente no es uniformemente acelerado el movimiento de rotacion de la palanca. No obstante, podemos suponer en la práctica, que en los primeros instantes del movimiento, no varía sensiblemente el seno q, y que se acelera uniformemente el movimiento.

Por egemplo, supongamos que en el primer instante esté la palanca en situacion orizontal, de modo que el seno $q =$ seno total $= 1$; que el peso $gQ = 300$ libras, $a = 4$ pies, $c = 10$ pies. Si tuviéramos solamente $gcN = gaQ$ ó $gN = 120$ libras, la fuerza F sola bastaría para formar equilibrio con el peso gQ. Para dar movimiento á la máquina, supongamos gN ó $F = 122$ libras. Supongamos tambien que determinando la cantidad Mbb,

con-

conforme llevamos dicho (324), siendo la masa M proporcional, por egemplo, á 300 libras, hayamos hallado la linea $b = 6$ pies; tendremos, despues de todas las substituciones, $f = \frac{1}{135}g$, y quiere decir que la fuerza aceleratriz será $\frac{1}{135}$ de la pesantez ordinaria. Luego si acudimos á las dos tablas (567 y 568), se verá que el punto A andará cerca de 4 pies en los seis primeros segundos del movimiento, y que al cabo de este tiempo habrá adquirido una velocidad con la qual andará uniformemente cerca de 1 pie y 4 pulgadas por segundo. Así, si pasado este término permanece sensiblemente uniforme el movimiento de la máquina, sea por causa de la diminucion de la fuerza F, ó por razon de las variaciones que padece el seno q, conoceremos, á lo menos por aproximacion, la velocidad de rotacion del punto A, y por consiguiente la de otro punto qualquiera de la palanca. Fig.

573 Si en lugar de la fuerza F hay en F un peso qualquiera atado firmemente á la palanca, de modo que todo el systema se mueva con libertad al rededor del punto C, y si quedándose todo lo demás como antes (572), llamamos H la masa del nuevo peso, Rkk la suma de los productos de las moléculas de H por los quadrados de sus distancias al ege C, n* el seno del ángulo que forma con la vertical la recta FC tirada desde el centro de gravedad F del

* Tomamos la letra n distinta de q para representar el seno del ángulo de que se trata, porque puede suceder que los puntos A, C, F no estén en linea recta, y que por consiguiente n discrepe de q.

Fig. del cuerpo H al punto C; hallaremos sobre la marcha por el mismo método, $f = \frac{g(ancH - qaaQ)}{Kkk + Mbb}$. Esta fórmula manifestará ácia qué parte dará vueltas la palanca, segun fuere la relacion entre A y Q.

244. 574 Cuestion III. *Estando atados dos pesos desiguales* P *y* Q *á los estremos de una cuerda* PRQ *que abraza una polea asegurada en un punto, y mobil sobre un ege; se pregunta ¿con qué velocidad bajará el mayor* P, *y hará subir al menor* Q?

Aquí no contamos con la inercia de la polea, ni con el rozamiento, ni con la rigidez de la cuerda.

Es evidente que podríamos responder á la pregunta por un método análogo al que hemos seguido en los dos artículos antecedentes, es á saber, resolviendo el peso motor P en otros dos, tales que el uno sirva para mantener en equilibrio el peso Q, y el otro sirva para mover la masa total $P + Q$ del systema, considerado como sin pesantez. Pero seguiremos ahora otro rumbo, y aplicarémos, por un método mas directo, el principio de la comunicacion de los movimientos.

Supongamos que los dos cuerpos P y Q, si hubiesen estado sueltos, hubiesen andado en un instante á impulsos de su pesantez natural los espacios iguales PN, QK; pero que por razon de la accion y reaccion con que cada uno de los dos obra en el otro, P ande PM bajando, y Q ande $QH = PM$ subiendo. Es evidente que representará MN la velocidad que perderá el cuerpo P en el instante propuesto,

to, y KH representa la velocidad ganada por el cuerpo Fig.
Q subiendo, durante el mismo instante. Pero es así que han de ser iguales el movimiento que pierde el cuerpo P, y el movimiento que gana el cuerpo Q (212); luego tendremos la equacion $P \times MN = Q \times KH$.

Los espacios pequeños PN, PM ó QH corridos en virtud de la gravedad natural, y de la fuerza aceleratriz que impele ahora cada uno de los puntos de las masas P y Q, se pueden considerar como las espresiones mismas de estas dos fuerzas. Por lo que, suponiendo la gravedad $PN = g$, la fuerza aceleratriz actual PM ó $QH = f$, se transformará la equacion precedente en $P(g - f) = Q(g + f)$; de donde se saca $f = \frac{g(P-Q)}{P+Q}$. Cuya equacion manifiesta que la fuerza aceleratriz simple f de cada uno de los cuerpos propuestos tiene con la gravedad natural g la razon constante de $(P - Q)$ á $(P + Q)$; de donde resulta que multiplicando los espacios determinados en las tablas (567 y 568) por el quebrado $\frac{(P-Q)}{(P+Q)}$, los productos serán los espacios andados por el cuerpo P bajando, y por el cuerpo Q subiendo, segun las condiciones de los tiempos que suponen dichas tablas.

Facil es percibir cómo se puede aplicar esta cuestion á la práctica. Representa el peso grande P toda la fuerza absoluta de la potencia que mueve la máquina, el peso Q representa el peso que se ha de levantar; representa $P(g - f)$ ó $\frac{2gPQ}{P+Q}$ la fuerza que gasta la potencia para levantar la carga á pesar de su peso, y Pf ó $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$ la fuerza que le queda á

Fig. la misma potencia. Por egemplo, si la potencia es un hombre, un caballo &c. cuya fuerza absoluta $=gP$, este hombre ó caballo gasta en levantar la carga una parte de su fuerza espresada por $\frac{2gPQ}{P+Q}$, y no le queda mas que una fuerza espresada por $\frac{gP(P-Q)}{P+Q}$ con la qual prosigue caminando.

575 Es evidente que á la parte CP de la cuerda la tiene tirante una fuerza espresada por $P(g-f)$ ó $\frac{2gPQ}{P+Q}$, y que á la parte BQ la tiene tirante una fuerza espresada por $Q(g+f)$ ó $\frac{2gPQ}{P+Q}$. Estas dos fuerzas iguales causan en los apoyos de la polea una presion igual á su suma, cuya espresion es por consiguiente $\frac{4gPQ}{P+Q}$.

Con esto se conoce la resistencia que ha de aguantar la cuerda, y la carga que sostiene el obstáculo fijo que mantiene la polea. Es de advertir que esta última fuerza es menor que la suma de los dos pesos P y Q, siendo así que en el simple estado del equilibrio, siempre es igual á la suma de los dos pesos, ó al duplo del uno de ellos.

244. 576 Cuestion IV. *Estando todo del mismo modo que en la cuestion antecedente, se nos pide que atendamos á la inercia de la polea.*

Una vez que está asegurado fijamente el centro de la polea, no tiene de suyo ninguna tendencia para dar vueltas antes ácia un lado que ácia otro, y siempre las dará ácia el peso preponderante P. Fuera de esto, es evidente que el momento del movimiento que pierde el cuerpo P al rededor del centro de la polea, ha de ser igual á la suma de los momentos de los movimientos que ganan el cuerpo Q, y la masa de

de la polea al rededor del mismo punto. Pero si llamamos g la gravedad natural; f, la fuerza aceleratriz simple de cada uno de los puntos de las masas P y Q; b, el radio de la polea, Mkk, la suma de los productos de las moléculas de la polea por los quadrados de sus distancias al centro, es evidente que el momento del movimiento perdido por el cuerpo P es $P(g-f)b$; que el momento del movimiento que gana el cuerpo Q, es $Q(g+f)b$; que el momento del movimiento que gana la polea, es $Mkk \times \frac{f}{b}$, porque todos los puntos de la circunferencia dán la vuelta con la misma velocidad que baja el cuerpo P, y sube el cuerpo Q. Tendremos, pues, $P(g-f)b = Q(g+f)b + \frac{Mkkf}{b}$; de donde sacaremos $f = \frac{g(Pbb-Qbb)}{Pbb+Qbb+Mkk}$. Por consiguiente la fuerza aceleratriz f está con la gravedad g en la razon constante de $(Pbb-Qbb)$ á $(Pbb+Qbb+Mkk)$, y por las tablas (567 y 568) se sacarán los espacios que andarán en un tiempo dado los cuerpos P y Q. Fig.

577 Es patente que á los dos cordones CP y BQ los tiene tirantes una misma fuerza; y como la tension de BP es siempre igual al movimiento que pierde el cuerpo P, esto es, á $P(g-f)$, se sigue que poniendo en lugar de f su valor, la espresion de cada una de las dos tensiones propuestas será $\frac{gP(2Qbb+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}$.

Estas dos fuerzas producen en el centro ó en los apoyos de la polea, una presion $= \frac{2gPQ(2Qbb+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}$.

Si quisiéramos determinar directamente la tension de BQ, consideraríamos que esta fuerza es igual á la suma del

Fig. movimiento ganado por el cuerpo Q, y del movimiento ganado por la masa de la polea en la direccion QB; porque la máquina se mueve cabalmente del mismo modo que si, en lugar de la masa de la polea, se atase firmemente en un punto qualquiera del cordon BQ una masa que no pesase, y que opusiese al movimiento la misma resistencia que opone la masa de la polea. En este segundo caso la tension de BQ es igual al movimiento ganado por el cuerpo Q, mas al movimiento ganado por la nueva masa; de modo que si llamamos R esta misma masa, será la tension de $BQ = Q(g + f) + R \times f$. Pero ya que la masa R, y la masa de la polea oponen la misma resistencia al movimiento al rededor del centro, tenemos $R \times f \times b = \frac{Mkkf}{b}$, ó $R = \frac{Mkk}{bb}$; luego la tension de $BQ = Q(g + f) + \frac{Mkk}{bb} = \frac{2gPQ(2Qbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk}$. Es de mucha importancia esta advertencia, para valuar sin dificultad las tensiones de los cordones, quando las fuerzas que de ellos tiran, no tienen unos mismos brazos de palanca respecto del centro del movimiento. En el caso presente no todos los puntos de la masa de la polea tienen unos mismos brazos de palanca respecto del centro de la misma polea.

244. 578 Cuestion V. *Permaneciendo todo del mismo modo que en la cuestion antecedente, se nos pide que atendamos al rozamiento y á la rigidez de la cuerda.*

Sea la gravedad natural. . . . . $= g$

La fuerza aceleratriz simple de cada uno de los puntos de los cuerpos P y Q. . . . . $= f$

El

El radio del ege de la polea. . . . . $= a$ Fig.

El radio de la polea compreendiendo tambien el de la cuerda. . . . . $= b$

La suma de los productos de las moléculas de la polea por los quadrados de sus distancias al centro. . . . . $= Mkk$

La razon entre el rozamiento y la presion. . . . . $= n$

El radio de la cuerda. $= c$

Supongamos tambien que una cuerda cuyo radio es b, con una presion conocida N, enroscándose al rededor de un rodillo, cuyo radio junto con el de la cuerda es m, tenga una rigidez igual á un peso conocido q.

Sentado esto, es evidente que el momento del movimiento perdido por el cuerpo P, al rededor del centro de la polea, ha de ser igual á la suma que componen el momento del movimiento ganado por el cuerpo Q, el momento del movimiento ganado por la polea, el momento del rozamiento, y el momento de la rigidez de la cuerda, respecto del mismo centro.

Pero 1.° el movimiento perdido por el cuerpo $P = P(g - f)$; de cuyo movimiento el momento $= P(g - f)b$.

2.° El movimiento ganado por el cuerpo $Q = Q(g + f)$; de cuyo movimiento el momento $= Q(g + f)b$.

3.° El momento del movimiento ganado por la polea $= \frac{Mkkf}{b}$.

4.° Ya que la fuerza que tiene tirante cada cordon CP, BQ, es evidentemente igual al movimiento perdido

Fig. por el cuerpo P, quiero decir á $P(g-f)$, y por consiguiente la presion del ege sobre la superficie de su cubo es $2P(g-f)$, síguese que será $2nP(g-f)$ la espresion del rozamiento, y que la del momento de esta fuerza respecto del centro será $2anP(g-f)$.

5.° Tambien se echa de ver que será $\frac{2qmcP(g-f)}{Nbh}$ el valor de la rigidez de la cuerda, y que el momento de esta fuerza respecto del centro será $\frac{2qmcbP(g-f)}{Nbh} = \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}$. Tendremos, pues,

$$P(g-f)b = \begin{cases} Q(g+f)b + \frac{Mkkf}{b} + \\ 2anP(g-f) + \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}. \end{cases}$$

De donde sacamos (con hacer $\frac{qm}{Nh} = r$),

$$f = \frac{g(Pbb - Qbb - 2nabP - 2rbcP)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}.$$

Una vez que manifiesta esta equacion la razon que hay entre la fuerza aceleratriz f y la gravedad g, será facil averiguar la razon que ha de haber entre los espacios que andarán libremente los cuerpos propuestos, y los que andarían á impulsos de la pesantez.

579 La fuerza que tiene tirante cada cordon CP, BQ, es $P(g-f) = \frac{gP(2Qbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}$, y la presion vertical que aguanta el centro, ó padecen los apoyos de la polea $= \frac{2gP(2Qbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk - 2nabP - 2rbcP}$.

245. 580 Cuestion VI. *Supongamos que bajando verticalmente el cuerpo* P *á impulsos de su pesantez, arrastre tras sí al cuerpo* Q *por el plano inclinado* DB, *por medio de una cuerda* POQ *que pasa por el carrillo de una polea asegurada en el vértice* B *del plano inclinado, y cuya parte* OQ

es

es paralela á BD ; *se pregunta ¿quál será la velocidad de los dos cuerpos á cada instante?* Fig.

Prescindiremos por ahora de la inercia de la polea, del rozamiento, y de la rigidez de la cuerda.

Sean BC y CD la altura y la base del plano inclinado BD. Supongamos que á haber estado libres los dos cuerpos, P hubiese andado en un instante la vertical PN á impulsos de su pesantez natural, y Q hubiese andado QK á impulsos de su pesantez relativa; pero que por razon de estar sugetos ambos cuerpos, P ande PM, y Q ande QH. Tendremos (212) la equacion $P \times MN = Q \times KH$.

Sea la gravedad natural . . . . $= g$
La fuerza aceleratriz simple de cada uno de los puntos de los cuerpos P y Q . . . . $= f$
BC. . . . . $= d$
CD. . . . . $= e$
BD. $= \sqrt{(dd + ee)} = s$

Tendremos $MN = g - f$, $QK = \frac{gd}{s}$, $KH = f + \frac{gd}{s}$; luego la equacion precedente se transformará en $P(g - f) = Q(f + \frac{gd}{s})$, de donde sacaremos $f = \frac{g(P - \frac{dQ}{s})}{P + Q}$.

581 La fuerza que tiene tirantes cada uno de los dos cordones ZP, OQ, es $= P(g - f) = \frac{gP(Q + \frac{dQ}{s})}{P + Q}$. Pero la direccion de la tension del cordon ZP es paralela á BC,

Fig. y la de la tension del cordon OQ es paralela á BD. Para determinar la presion que causan estas dos fuerzas en el centro A de la polea, representémoslas por las rectas AE, AG iguales entre sí, y respectivamente paralelas á BC y BD. La presion que buscamos se podrá representar por la diagonal AF. Sea i el seno del ángulo CBD; l, el seno de la mitad del mismo ángulo, siendo 1 el seno total; la espresion analýtica de AF será $\frac{gP(Q + \frac{dQ}{s})}{P+Q} \times \frac{l}{i}$.

Por lo que mira á la presion que aguanta el plano inclinado BD, es siempre $\frac{egQ}{s}$, la misma que si no hubiera movimiento.

245. 582 Cuestion VII. *Permaneciendo todas las cosas del mismo modo que en la última cuestion, se nos pide que atendamos á la inercia de la polea.*

Conservarémos las mismas denominaciones del artículo antecedente, y llamarémos como antes (576) Mkk la suma de los productos de las moléculas de la polea por los quadrados de sus distancias al centro. Es evidente que de estos supuestos sacarémos la equacion $P(g-f)b = Q(f + \frac{dg}{s})b + \frac{Mkkf}{b}$, ó $f = \frac{g(Pbb - \frac{dQbb}{s})}{Pbb + Qbb + Mkk}$, que dá la razon entre la fuerza aceleratriz f y la gravedad g.

583 La espresion de la fuerza que tiene tirante cada uno de los dos cordones ZP, OQ, es $= \frac{gP(Qbb + \frac{dQbb}{s} + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk}$,

Y

y la de la presion que resulta contra el centro de la polea, es Fig.

$$=\frac{gP(Qbb+\frac{dQbb}{s}+Mkk)}{Pbb+Qbb+Mkk}\times\frac{l}{i}.$$

584 Cuestion VIII. *Quedándose las cosas del mismo modo que en la cuestion antecedente, se nos pide atendamos tambien al rozamiento y á la rigidez de la cuerda.* 245.

Reparo desde luego que hemos de considerar aquí dos especies de rozamiento. El uno obra en el ege de la polea, y el otro en el plano inclinado *BD*. Este es por lo regular mas considerable que el primero, porque se pone bastante cuidado en alisar y untar los eges. Usarémos, pues, de distintos números para espresar las razones que hay entre estos dos rozamientos y las presiones de que se originan.

Usarémos de las mismas denominaciones, y llamarémos a el radio del ege de la polea; c, el de la cuerda; b, el radio de la polea, junto con el de la cuerda; n, la razon entre el rozamiento contra el ege, y la presion que dicho ege aguanta; p, la razon entre el rozamiento contra el plano inclinado, y la presion que padece el mismo plano; q, la rigidez de una cuerda dada, cuyo radio es b, que se enrosca en un rodillo cuyo radio, junto con el de la cuerda, es m, y está cargada de un peso conocido N.

Sentado todo esto, el movimiento perdido por el cuerpo $P = P(g - f)$; el momento de este movimiento respecto del centro de la polea $= P(g - f)b$. El movimiento ganado por el cuerpo $Q = Q(f + \frac{dg}{s})$; el momento de este

mo-

Fig. movimiento respecto del centro $= Q(f + \frac{dg}{s})b$. El momento del movimiento ganado por la masa de la polea $= Mkk + \frac{f}{b}$, como antes. Siendo en general, como es evidente, $P(g - f)\frac{l}{i}$ la espresion de la presion que obra contra el ege de la polea, el rozamiento contra el mismo ege será $= nP(g - f)\frac{l}{i}$, el momento de este rozamiento respecto del centro $= \frac{naP(g-f)l}{i}$. El rozamiento contra el plano inclinado $BD = \frac{pgeQ}{s}$; el momento de este rozamiento respecto del centro $= \frac{pgeQb}{s}$. Finalmente, siendo $2P(g - f)$ la fuerza absoluta que tira la cuerda, y la impide que se doble, la rigidez de la misma cuerda será $= \frac{2qmcP(g-f)}{Nbh}$; el momento de la rigidez respecto del centro $= \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}$, como antes. Verdad es que la cuerda no abraza ahora un semicírculo entero, por lo qual es algo menor su rigidez; pero esta circunstancia hace muy poco al caso.

El momento del movimiento perdido por el cuerpo P ha de ser igual á la suma de todos los demás momentos; tendremos, pues, la equacion

$$P(g - f)b = \begin{cases} Q(f + \frac{dg}{s})b + \frac{Mkkf}{b} + \\ \frac{naP(g-f)l}{i} + \frac{pegQb}{s} + \frac{2qmcP(g-f)}{Nh}; \end{cases}$$

de la qual sacaremos (haciendo $\frac{d}{s} = t$, $\frac{e}{s} = x$, $\frac{l}{i} = u$, $\frac{qm}{Nh} = r$),

$$f = \frac{g(Pbb - tQbb - nabuP - pxQbb - 2rbcP)}{Pbb + Qbb + Mkk - nabuP - 2rbcP},$$

cuya equacion manifiesta la razon que hay entre la fuerza aceleratriz f, y la gravedad g.

585 La fuerza que tiene tirante cada uno de los dos cordones, es $= \frac{gP(Qbb + tQbb + pxQbb + Mkk)}{Pbb + Qbb + Mkk - nabuP - 2rbcP}$; y la presion contra el centro de la polea $= \frac{gP(Qbb - tQbb + pxQbb + Mkk)2}{Pbb + Qbb + Mkk - nabuP - 2rbcP}$.

Cues-

586 Cuestion IX. *Estando atados dos cuerpos* P *y* Q *á los estremos de dos cuerdas que se enroscan al rededor de dos poleas ó ruedas concéntricas, de radios diferentes, y suponiendo que* P *bage á impulsos de su pesantez, baciendo que suba* Q; *¿quáles serán las velocidades de las dos ruedas á cada instante?* Fig. 246.

Prescindimos por ahora de la inercia de las ruedas, del rozamiento, y de la rigidez de las cuerdas.

Supongamos que si hubieran estado libres los dos cuerpos P y Q, hubiesen andado en un instante, á impulsos de su pesantez natural, los espacios iguales PN, QK; pero que por razon de estar sugetos, P ande PM bajando, y Q ande QH subiendo. Sentado esto, el momento del movimiento perdido por el cuerpo P ha de ser igual al momento del movimiento ganado por el cuerpo Q, y tendremos, tirando los radios AC, AB, la equacion $P \times MN \times AB = Q \times KH \times AC$.

Sea la gravedad natural PN ó QK . . . . $= g$

La fuerza aceleratriz PM de cada uno de los puntos del cuerpo P . . . . $= p$

La fuerza aceleratriz QH de cada uno de los puntos del cuerpo Q. . . . . $= q$

El radio CA de la rueda menor. . . . . $= a$

El radio AB de la rueda mayor . . . . $= b$

La equacion precedente se transformará en $P(g - p)b = Q(g + q)a$.

Fuera de esto, es evidente que las velocidades p y q con

Fig. con que dán vueltas los puntos *B* y *C* de las dos ruedas, son proporcionales á los radios de las mismas ruedas; y tendremos por consiguiente $p : q :: b : a$; luego $pa = bq$. Comparando una con otra estas dos equaciones, hallaremos $p = \frac{g(Pbb - Qab)}{Pbb + Qaa}$, $q = \frac{g(Pab - Qaa)}{Pbb + Qaa}$, cuyos valores manifiestan la razon que hay entre cada fuerza aceleratriz p y q, y la gravedad g; será facil por lo mismo determinar los espacios andados por los dos cuerpos en un tiempo dado.

587 La fuerza que tiene tirante el cordon *BQ*, es igual al movimiento perdido por el cuerpo *P*, cuya espresion es por consiguiente $P(g - f) = \frac{gP(Qaa + Qab)}{Pbb + Qaa}$. La fuerza que tiene tirante el cordon *CQ*, es igual al movimiento ganado por el cuerpo *Q*, cuya espresion es por consiguiente $Q(g + q) = \frac{gQ(Pbb + Pab)}{Pbb + Qaa}$.

Causan estas dos fuerzas en el centro *A*, comun á ambas ruedas, una presion vertical igual á su suma; cuya espresion es por consiguiente $\frac{gP(Qaa + Qab)}{Pbb + Qaa} + \frac{gQ(Pbb + Pab)}{Pbb + Qaa} = \frac{gPQ(aa + 2ab + bb)}{Pbb + Qaa} = \frac{gPQ(a + b)^2}{Pbb + Qaa}$.

Para los que hubieren leído con cuídado todo lo dicho hasta aquí, y tuvieren presente lo que advertimos antes (577), será facil resolver la cuestion actual, atendiendo á la inercia de las ruedas, al rozamiento, y á la rigidez de las cuerdas.

Fig. 47. 588 Cuestion X. *Sea* OMC *una rueda de carruage, que vá rodando por el suelo* GH *á impulsos de una fuerza dada* F, *cuya direccion* AF *pasa por su centro* A, *y es paralela al plano* GH; *¿quál será la velocidad de la rueda?*

Des-

Desde luego es evidente, que si no hubiera rozamiento en M, no tuviera la rueda mas que un simple movimiento progresivo; de suerte que llamando P la masa entera que se ha de mover; f, la simple fuerza aceleratriz del centro A, tendríamos la equacion $F = P \times f$, ó $f = \frac{F}{P}$; pero este caso no se verifica en la naturaleza. Fig.

Supongo, pues, que á medida que vá caminando el centro A en la direccion GH, haya en M una fuerza MV que impele la rueda para que dé vueltas en la direccion opuesta CMO, teniendo presente no obstante que esta fuerza MV es una fuerza puramente pasiva, que no tiene mas egercicio que el que la procura la fuerza F. Supongo tambien que el centro de gravedad del peso de la rueda, y de los pesos estraños que se la pueden cargar, esté, sensiblemente por lo menos, en el plano que pasa por el ege A del movimiento, y es paralelo al terreno GH.

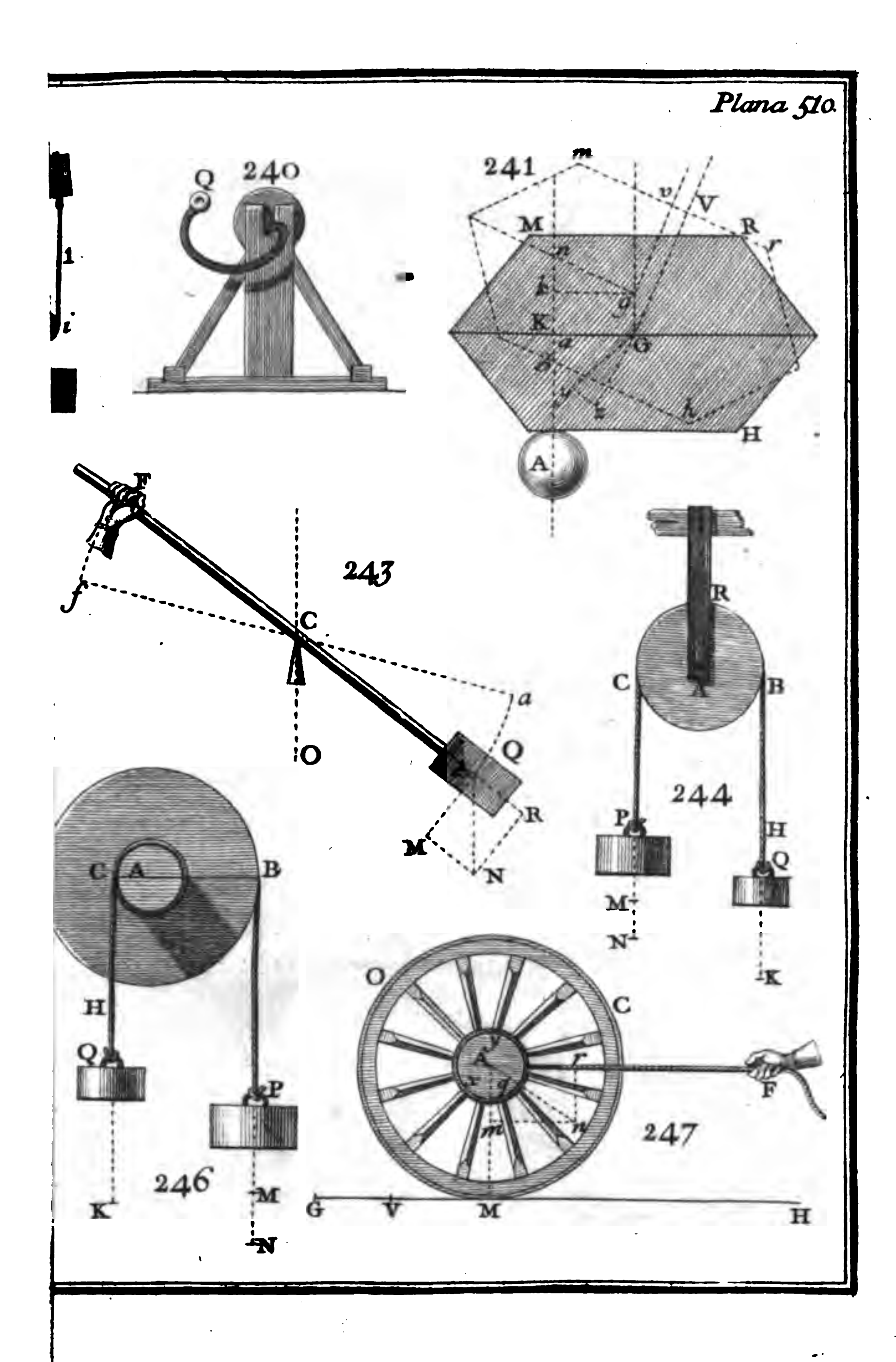
Sea la fuerza absoluta MV	$= H$
La masa de toda la máquina.	$= P$
La fuerza aceleratriz simple del centro A	$= f$
La fuerza aceleratriz simple de rotacion del punto M.	$= m$
La suma de los productos de las partes de la rueda que dán vueltas, por los quadrados de sus distancias al ege A del movimiento.	$= Mkk$
El radio Aq del ege xqy	$= a$
El radio AM de la rueda OCM.	$= b$

1.°

Fig. 1.° Tendremos (178) la equacion $F - H = P \times f$, ó $f = \frac{F-H}{P}$.

2.° Se emplea la fuerza H en dar vueltas á la rueda, y vencer el rozamiento del ege contra el cubo. Por consiguiente el momento de H, esto es, Hb, ha de ser igual al momento del movimiento que gana la rueda dando vueltas, mas al momento del rozamiento. Pero el momento del movimiento de rotacion es $Mkk \times \frac{m}{b}$. Para hallar el momento del rozamiento, represento por Ar la fuerza F, ó la presion del ege contra el cubo, en la direccion AF: por Am la presion conocida (que llamo R) del ege contra el cubo en la direccion AM. Concluyendo despues el paralelogramo rectángulo $Arnm$, tiro la diagonal An. Es patente que esta diagonal An, cuya espresion es $\sqrt{(FF + RR)}$, representa la presion del punto q de la superficie del ege contra la superficie del cubo. Luego si llamamos n la razon entre el rozamiento y la presion, el rozamiento de que se trata será $n\sqrt{(FF + RR)}$, y el momento de este rozamiento respecto del centro A, será $na\sqrt{(FF + RR)}$. Tendremos, pues, la equacion $H \times b = \frac{Mkkm}{b} + na\sqrt{(FF + RR)}$, ó $m = \frac{Hbb - nab\sqrt{(FF+RR)}}{Mkk}$.

589 Se ha esperimentado que en una rueda que dá con libertad vueltas por el suelo, el centro A y el punto M tienen sensiblemente la misma velocidad. Si combinamos este esperimento con las fórmulas antecedentes, sacaremos un medio muy sencillo para determinar la fuerza H, bien que es dificultoso señalar la causa física que causa


240
Q
241
m
M
R
r
v
V
n
b
g
K
G
a
z
h
H
A
F
f
243
C
a
O
Q
R
M
N
R
C
A
B
244
P
H
Q
M
N
K
C
A
B
H
Q
P
246
K
M
N
O
C
A
r
F
m
n
247
G
V
M
H

sa esta fuerza. Porque si suponemos $f = m$, tendremos una equacion en que no habrá mas incógnita que H. Fig.

Me paro poco en estas consecuencias que se infieren de nuestras fórmulas. Se echa de ver que los dos movimientos de la rueda ván desde luego creciendo; pero muy en breve llegan ambos movimientos, segun hemos observado (570), á la uniformidad, ó si se quiere, son succesivamente acelerados y retardados en intervalos de tiempo muy cortos, por manera que la velocidad adquirida al principio parece, con poca diferencia, uniforme. Los animales que tiran del carruage, despues de haberle comunicado la velocidad permanente y uniforme de que hemos hablado, no hacen cada instante otra cosa mas que levantar el mismo carruage de entre los hoyos del terreno en que se mete, con lo que causan en M una fuerza cuyo oficio es vencer continuamente el rozamiento del ege contra el cubo.

Resolucion de algunas Cuestiones de Dinámica.

590 Cuestion I. *Hallar la naturaleza de la curva* isocrona, *ó de una curva tal que si un cuerpo grave cayere á lo largo de ella, ande alturas iguales en tiempos iguales.* 248.

Supongamos que un cuerpo grave cayga libremente á lo largo de la curva ADF, de modo que empezando su caida en el punto A, se halle al cabo de un segundo en el punto D, correspondiente á la altura vertical AC, y al cabo de otro segundo se halle en el punto F, correspondien-

Fig. diente á la altura vertical *AE*, tal que $AE = 2AC$; ó tal que si el tiempo que gasta el cuerpo para andar *AF* es al tiempo que gastare para andar $AD :: p : q$, sea tambien $AE : AC :: p : q$; el empeño está en hallar una equacion en que esté cifrada la naturaleza de la curva *ADF*.

249. Imaginemos que el cuerpo cayendo desde *A* ande la curva que se pide *BFG*, en la qual se tomarán los arcos infinitamente pequeños *DG*, *FH*, que podemos considerar como lineas rectas, correspondientes á las alturas iguales *GI*, *HL*; y prolonguénse dichos arcos *DG*, *FH* hasta que resulten las tangentes *GM*, *HN*, y tírese la *DP* paralela á *HN*. Las velocidades que el cuerpo hubiere adquirido en los puntos *G* y *H*, son las mismas (248) que adquiriria cayendo perpendicularmente desde la misma línea orizontal *AC*, andando las rectas *CG*, *EH*, cuyas líneas serían en este supuesto los espacios que el cuerpo hubiese andado, y serían como los quadrados de las mismas velocidades.

Esto presupuesto, *FH* es á *DG* en razon compuesta de la razon que hay entre *FH* y *HL*, y de la que hay entre la misma *HL*, ó su igual *GI* y *DG*; esto es, de la razon que hay entre la tangente *FN*, y la aplicada *FK*, y de la que hay entre otra aplicada qualquiera *DT*, y la tangente correspondiente *DM*. Pero ya que *DP* es paralela á *HN*, será *FN* á *FK*, como *DP* á *DT*. Luego la razon compuesta de la que hay entre *FN* y *FK*, esto es de la que hay entre *DP* y *DT*, y de la que hay entre

DT

DT y *DM*, es igual á la que hay entre *DP* y *DM*; luego la velocidad en *F* es á la velocidad en *D*, como *DP* á *DM*. Y como el quadrado de la velocidad en *F* es al quadrado de la velocidad en $D :: FK : DT$; tambien será $(DP)^2 : (DM)^2 :: FK : DT$. En virtud de esto queda la cuestion transformada en otra puramente geométrica, que se puede proponer en estos términos. Fig.

Dada de posicion la recta AC *y el punto* A; *hallar la curva* BFG, *tal que si por un punto qualquiera* D *se tira la tangente* DM, *y desde el punto* D *la* DP *paralela á la tangente* FN, *el quadrado de* DM *tenga con el quadrado de* DP *la misma razon que* DT *con* FK.

Es evidente que la recta *AC*, en la qual rematan las ordenadas *DT*, *FK*, no puede ser el ege de la curva, ní tampoco el punto *A* su vértice. Porque si pasase la curva por el punto *A*, la ordenada correspondiente á dicho punto sería cero; y si en vez de comparar la ordenada *DT* con la ordenada *FK*, la comparamos con la ordenada del punto *A*, sería infinita la razon que entre ellas hubiese; y como esta razon ha de ser igual á la que hay entre $(DM)^2$ y $(DP)^2$, resultaría que una cantidad infinita sería igual á una cantidad finita, cuya consecuencia es un absurdo.

Llamemos AK, x; FK, y; DT, a; DM, b; será $FL = dx$, $HL = dy$, y por consiguiente $FH = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. De los triángulos semejantes *LHF*, *TDP* se saca $LH : HF :: TD : DP$, esto es, $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: a : \frac{a\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$

Fig. $= DP$, y $(DP)^2 = \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2}$. Ya que por la propiedad de la curva $DT : FK :: (DM)^2 : (DP)^2$, esto es $a : y :: bb : \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2} :: bbdy^2 : aadx^2 + aady^2$, sacaremos $bbydy^2 = a^3dx^2 + a^3dy^2$; trasladando, $bbydy^2 - a^3dy^2 = a^3dx^2$, y sacando la raiz quadrada $dy\sqrt{(bby - a^3)} = dx\sqrt{a^3}$. Luego integrando será $\frac{2bby - 2a^3}{3bb} \times \sqrt{(bb - a^3} = x\sqrt{a^3}$; y si hacemos $y - \frac{a^3}{bb} = z$, la equacion llegará á ser $\frac{2}{3}z\sqrt{bbz} = x\sqrt{a^3}$, ó quadrando $\frac{4}{9}bbz^3 = a^3x$, y $z^3 = \frac{9a^3xx}{4bb}$. Y así, si desde A tiramos la perpendicular $AB = \frac{a^3}{bb}$, tiramos la BR paralela á AC, y desde el vértice B, siendo BR el ege, y $\frac{9a^3}{4bb}$, ó $\frac{9}{4}AB$ el parámetro, trazamos la parábola cúbica BHG, tal que el producto del parámetro por el quadrado de la abscisa sea igual al cubo de la aplicada, quedará construida la curva.

Ya que el cuerpo bajando por la curva BHG, anda alturas iguales en tiempos iguales; lo mismo es por lo tocante á la altura de la caida, que si con la velocidad final que tiene en B, habiendo caido por la recta AB, bajase despues por BS con un movimiento uniforme; en cuyo caso es constante que, en el mismo tiempo, se anda un espacio duplo del que se anda con un movimiento uniformemente acelerado desde el primer instante del movimiento; y por consiguiente si se toma BS dupla de AB, el tiempo que gastará para andar BH, despues de la caida por AB, será igual al que gastó para andar AB.

591 Cuestion II. *Hallar la curva* isocrona paracén-
250. trica, *ó la equacion de una curva* ABO, *tal que un cuerpo*

gra-

grave moviéndose á lo largo de ella, despues de caer de una altura dada RA, *se aparte igualmente en tiempos iguales de un punto dado* A. Fig.

Sea *ABM* la curva que se pide, y llamemos *AP*, x; *PM*, y; será por consiguiente $AM = \surd(x^2 + y^2)$, y su diferencia $MG = \frac{xdx + ydy}{\surd(x^2 + y^2)}$, lo que el cuerpo se aparta en un momento del punto *A*, mientras anda el arco $Mm = \surd(dx^2 + dy^2)$, asi como andando *AB*, que es el primer elemento de la curva, se aparta del mismo punto *A* toda la longitud del arco *AB*. Una vez que, por la cuestion, las cantidades *Mm*, *AB* que espresan lo que el grave se aparta del punto *A* son iguales, serán tambien iguales los tiempos que gasta en andar *AB*, *mM*; por consiguiente los espacios *AB* y *Mm*, esto es, $\frac{xdy + ydy}{\surd(x^2 + y^2)}$, y $\surd(dx^2 + dy^2)$ serán proporcionales á las velocidades que tuviere el cuerpo en *A* y *M*. Y por ser estas velocidades como las raices de las alturas de que ha caido el grave, esto es, como la raiz de $AR = a$, y de $AR + PM = a + y$, tendremos esta equacion $(a + y) \times \frac{(xdx + ydy)^2}{xx + yy} = a(dx^2 + dy^2)$, ó $ax^2dx^2 + 2axydydx + ayydy^2 + yxxdx^2 + 2yyxdydx + y^3dy^2 = axxdx^2 + axxdy^2 + ayydx^2 + ayydy^2$, que borrando las cantidades que se hallan en ambos miembros, trasladando el término $2ayxdydx$, y sacando la raiz quadrada, se reduce á $(xdx + ydy)\surd y = (ydx - xdy)\surd a$, cuya construccion se hace dificultosísima por la mezcla de las indeterminadas.

Escojamos, pues, otras indeterminadas que nos dén

Fig. una equacion de mejor índole, por medio de la qual se puedan señalar los puntos de la curva. Llamemos AM, t; FD, z; los triángulos semejantes ADF, APM darán AF, $AM :: FD : MP = \frac{tz}{a}$; $MG = dt$. Los sectores semejantes AHF, AmG darán $AF : FH :: Am : mG = \frac{tdz}{\sqrt{(aa-zz)}}$, por ser $FH = \frac{adz}{\sqrt{(aa-zz)}}$ (III. 350). Luego ya que MG: $Mm :: \sqrt{RA} : \sqrt{(RA+PM)}$, ó $(MG)^2 : (Mm)^2 :: RA$: $RA + PM$, ó $(AM)^2 : (mG)^2 :: RA : MP$, ó $dt^2 : \frac{ttdz^2}{aa-zz} ::$ $a : \frac{tz}{a}$, que se reduce á $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(aaz-z^3)}}$, donde las indeterminadas están todas separadas; integrando, sale $2\sqrt{t}$ $= S. \frac{adz}{\sqrt{(aaz-z^3)}}$, que es la equacion de la curva paracéntrica.

Pende, pues, la construccion de está curvá de la integracion de la cantidad $\frac{adz}{\sqrt{(aaz-z^3)}}$, que integrarémos por medio de la rectificacion de un arco de otra curva, ó suponiendo que $\frac{adz}{\sqrt{(aaz-z^3)}}$ es el elemento de un arco de curva.

Una vez que (III. 585) $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ es la fórmula general del elemento de un arco de curva qualquiera, tendremos por nuestro supuesto $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{adz}{\sqrt{(aaz-z^3)}}$, y $dx^2+dy^2 = \frac{a^2dz^2}{aaz-z^3}$. Esto dá á entender que las coordenadas dx, dy de la curva rectificable están espresadas en z; hemos, pues, de dividir el quadrado $\frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$, ó alguno de sus múltiplos, en otros dos cuyas raices sean integrables, si puede ser. Por consiguiente, como el numerador a^2dz^2 ha de ser la suma de dos quadrados, es preciso no solamente que los quadrados en que le hemos de dividir tengan signos opuestos, sino que tengan tambien de-

no-

nominadores de tal forma, que su producto sea la misma Fig.
cantidad $a^2z - z^3$. Pero como $a^2z - z^3$ no se puede resolver en dos factores que tengan las circunstancias mencionadas, y podrá egecutarse esta resolucion, si le transformamos en $a^2z^2 - z^4$, que es el producto de $(az + z^2) \times (az - z^2)$, multiplicaremos por z la fraccion $\frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$, y resultará estotra $\frac{a^2zdz}{a^2z^2-z^4}$. Si llamamos respectivamente M y N los numeradores de las raices, serán estas raices $\frac{Mdz}{\sqrt{(az+z^2)}}$ y $\frac{Ndz}{\sqrt{(az-z^2)}}$. Por lo dicho (III. 492) sabemos que cada una de estas cantidades será integrable, si fuese $M = \frac{1}{2}(a + 2z)$, y $N = \frac{1}{2}(a - 2z)$; por manera que dichas raices vengan á ser $\frac{(a+2z)dz}{2\sqrt{(az+z^2)}}$ y $\frac{(a-2z)dz}{2\sqrt{(az-z^2)}}$. Veamos, pues, si la suma de los quadrados $= \frac{a^2dz^2}{a^2z-z^3}$.

Por ser $dx = \frac{1}{2}\frac{(a+2z)dz}{\sqrt{(az+z^2)}}$, y $dy = \frac{1}{2}\frac{(a-2z)dz}{\sqrt{(az-z^2)}}$, será $dx^2 = \frac{(a^2+4az+4zz)dz^2}{4az+4z^2}$, y $dy^2 = \frac{(a^2-4az+4z^2)dz^2}{4az-4z^2}$; por consiguiente $dx^2 + dy^2 = \frac{(a^2+4az+4z^2)dz^2}{4az+4z^2} + \frac{(a^2-4az+4z^2)dz^2}{4az-4z^2}$; esta equacion despues de reducidos los dos términos de su segundo miembro á un mismo denominador, y egecutadas algunas reducciones, se transforma en $dx^2 + dy^2 = \frac{8a^3zdz^2}{16a^2z^2-16z^4} = \frac{a^3dz^2}{2a^2z-2z^3}$, que es un múltiplo del quadrado que nos propusimos resolver. Luego finalmente $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z-2z^3)}}$.

Pero ya que $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{(a^2z-z^3)}}$, sacaremos, multiplicando ambos miembros por $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$, $\frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{2t}} = \frac{adz\sqrt{a}}{\sqrt{(2a^2z-2z^3)}}$. Si multiplicamos por $\sqrt{a}$ ambos términos de la fraccion que compone el primer miembro, no mudará de valor; luego tendremos $\frac{adt}{\sqrt{2at}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z-2z^3)}}$, y pasando t del denominador del

Fig. primer miembro al numerador, será $\frac{at^{-\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{2a}} = \frac{dz\sqrt{a^3}}{\sqrt{(2a^2z - 2z^3)}}$ $= du$; integrando, saldrá $\frac{2at^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a}} = u$; y considerando que $2a = \sqrt{2a} \times \sqrt{2a}$, será $\frac{\sqrt{2a} \times \sqrt{2a} \times t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2at}$ $= u$, $2at = u^2$, y $t = \frac{u^2}{2a}$.

Como esta equacion dá el valor de t, si queremos construir la curva isocrona paracéntrica, hemos de construir primero la curva cuyas coordenadas son respectivamente $\sqrt{(az + z^2)}$ y $\sqrt{(az - z^2)}$, de las quales la primera es la semiordenada de una hypérbola equilátera, cuyo primer ege $= a$, y la abscisa $= z$, y la segunda es la semiordenada de un círculo cuyo diámetro $= a$, y la abscisa $= z$.

Declaremos por menor la naturaleza de esta curva, llamando respectivamente x é y sus coordenadas. Tendremos, pues, $x = \sqrt{(az + z^2)}$, é $y = \sqrt{(az - z^2)}$. Por consiguiente $x^2 = az + z^2$, é $y^2 = az - z^2$. Si resolvemos la primera de estas equaciones para sacar el valor de z, hallaremos $z = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)} - \frac{1}{2}a$; será, pues, $az = -\frac{1}{2}a^2 + a\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)}$, y $z^2 = x^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + x^2)} = x^2 + \frac{1}{2}a^2 - a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)}$; y por lo mismo $az - z^2 = y^2 = -x^2 - a^2 + 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)}$, que dá $y^2 + x^2 + a^2 = 2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)}$, y quadrando, $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2a^2x^2 + a^4 =$

4.

$4a^2x^2 + a^4$. Esta equacion manifiesta que la curva de cuya rectificacion pende la construccion de la isocrona paracéntrica, es del quarto grado. Fig.

Veamos por mayor qual es su curso. Si hacemos $x = 0$, saldrá $y^4 + 2a^2y^2 = 0$, ó $(y^3 + 2a^2y)y = 0$; luego $y = 0$, y por consiguiente la curva pasa (III. 16) por el origen. El supuesto de $y = 0$, dá tambien $x = 0$; si diéramos succesivamente diferentes valores á x, sacaríamos que la curva se vá apartando del ege, hasta encontrar en I con el círculo trazado desde el centro A, y con el radio $AN = a$. Porque si diferenciamos la equacion hallada de la curva, y suponemos despues $dy = 0$, sacaremos (III. 401) el valor de la mayor ordenada y, que será $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, que espresa cabalmente la ordenada del círculo cuyo centro es A, y el radio $= NA$. Siguiendo el rastro de la curva mas allá de I, hallaríamos que se vá arrimando al ege, hasta que $x = \sqrt{2a^2}$, donde encuentra otra vez el ege, y es otra vez $y = 0$, conforme lo verificará el que substituyere en la equacion que la representa, $\sqrt{2a^2}$ en lugar de x. 251.

Si en la equacion $a^2 - x^2 = y^2$, substituyéramos en lugar de y^2 su valor $2a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{4}a^2)} - x^2 - a^2$ que hallamos antes, sacaríamos, despues de egecutadas las operaciones correspondientes, $x = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = DH$.

Supongamos ahora en G el origen de las abscisas, y $GQ = u$, será $AQ = x = b - u$, y por ser $b = \sqrt{2a^2}$, la equacion de la curva se transformará en $b^2(b - u)^2 +$

Fig. $(b-u)^4 = y^4 + 2y^2(b-u)^2 + b^2y^2$. Y si hacemos u mayor que b, pongo por caso $= \frac{3}{2}b$, será $b-u = b - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2}b$, $(b-u)^2 = \frac{1}{4}b^2$, $(b-u)^4 = \frac{1}{16}b^4$; por consiguiente $\frac{1}{3}b^4 - \frac{1}{16}b^4 = y^4 + \frac{1}{2}b^2y^2 + b^2y^2$, esto es, $\frac{3}{16}b^4 = y^4 + \frac{3}{2}b^2y^2$. Por consiguiente yá que el valor de y es real aun quando GQ es mayor que GA, ó que el ege de la curva $GIFAIG$, la curva prosigue mas allá de A, y sus ramos se cruzan en A, donde forman un nudo. La misma construccion está manifestando que la parte inferior de la curva es semejante á la superior.

Si queremos determinar el ángulo que la curva forma con el ege en A, indagaremos qué razon hay entre los lados infinitamente pequeños Aq y qf practicando lo siguiente. $qA = dx = \frac{(a+2z)dz}{2\sqrt{(az+zz)}}$, $qf = dy = \frac{(a-2z)dz}{2\sqrt{(az-zz)}}$; pero quando está z para desvanecerse, es $z = dz$; por consiguiente, si en lugar de z se substituye dz, qA será $= \frac{adz+2dz^2}{2\sqrt{(adz+dz^2)}}$, y $qf = \frac{adz-2dz^2}{2\sqrt{(adz-dz^2)}}$. Despreciando las cantidades dz^2, se transforma $qA =$ en $\frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \frac{1}{2}\sqrt{adz}$, y qf en $\frac{adz}{2\sqrt{adz}} = \frac{1}{2}\sqrt{adz}$. Luego $qA = qf$; y como Aq es la semiordenada de la hypérbola, y qf la semiordenada del círculo, será en el vértice $qf = qA$, y el ángulo qAf que forma la curva con el ege será semirecto, y el ángulo de la curva recto.

Finalmente, podrémos fijar la naturaleza de la curva isocrona paracéntrica, considerando los valores de x é y, pues si $z = a$, será $x = \sqrt{(az+z^2)} = \sqrt{2a^2} = AG$, é $y = \sqrt{(a^2 - z^2)} = \sqrt{(a^2 - a^2)} = 0$, y por consiguiente $AO = t = \frac{u^2}{2a} = \frac{(AFIG)^2}{2a}$, de lo qual sacaremos $AO : AFIG :: AFIG : 2a$.

Cues-

592 Cuestion III. *Hallar la equacion de la curva llamada* catenaria, *esto es, de la curva que forma un hilo ó una cadena floja que cuelga libremente de dos puntos fijos, á los quales están atados sus estremos.* Fig. 252.

Sea *BAC* una cadena muy flexible é inestensible, formada, por egemplo, de eslabones muy pequeños iguales, ó de bolitas iguales, cuyos dos estremos estén atados en los puntos *B* y *C* de la misma orizontal *BC*; se pide la naturaleza de la curva *BAC*, que forma la espresada cadena colgando libremente.

1.° Es evidente que pues suponemos la cadena perfectamente uniforme en toda su tirantez, se ha de poner en tal situacion en virtud de su pesantez y flexibilidad, que si tiramos por el punto *A*, que suponemos sea el mas bajo de la curva, la vertical *DA*, la figura *BAC* esté dividida en dos partes iguales é uniformes; por manera que si tomamos *AD* por ege, y el origen en *A*, las ordenadas *DB*, *DC* correspondientes á un mismo punto *D* del ege, serán iguales.

2.° Que la parte de la curva en el vértice *A*, que suponemos infinitamente pequeña, es paralela al orizonte, y que por lo mismo la tangente *Ag* en el vértice es orizontal.

3.° Que si en el supuesto de estar la cadena en un plano vertical, y en la situacion que coge despues de afianzada en *B* y *C*, se la afianzára en el punto *A* del plano vertical, no mudaría de figura; por manera que si nos figuramos que entonces se la quite una mitad como *AC*, por egemplo, la mitad restante *BA* guardaría la misma figura

que

Fig. que tenia antes. Por consiguiente, podemos suponer en el punto *A* una fuerza *a* que aparta cada mitad *BA*, *CA* de la situacion vertical, ó de la perpendicular al orizonte *Bg* ó *CK*, en que estaría por su peso, si solo estuviese afianzada en uno de sus estremos *B* y *C*, para obligarla á tomar la figura *BAC*.

4.° Que cada punto de la cadena está tirado perpendicularmente ácia abajo por el peso de la porcion de la cadena que coge desde dicho punto hasta el punto ínfimo *A*. Así, el punto *B* es tirado ácia abajo verticalmente por el peso de la mitad *AB* de la cadena; cada punto de los que están entre *B* y *A*, es tirado igualmente por el peso del arco de la cadena que coge desde dicho punto al punto *A*. Por razon de la uniformidad de la cadena, podemos tomar cada uno de sus arcos que llamaremos *u*, por la pesantez del mismo arco. Por donde se echa de ver que cada porcioncita de la cadena es tirada verticalmente por la fuerza del peso *u*, y orizontalmente al mismo tiempo por la fuerza *a* que obra en el vértice *A*; con lo qual está precisada á tomar la situacion de la tangente en dicho punto, ó de la espresada porcioncita de la curva.

5.° Luego si imaginamos que por un punto qualquiera de la cadena, pongo por caso, el punto *B*, se tire una vertical *Bg* hasta la tangente orizontal *Ag* en el vértice *A*, tiramos tambien la tangente *BM* en el punto *B* de la cadena, y por *g* la paralela *gN* á la tangente *BM*, el punto *B* será impelido verticalmente en la direccion *Bg* por

el

el peso de la mitad de la cadena, y orizontalmente al mismo tiempo en la direccion orizontal gA, ú otra paralela á gA en el punto B, por una fuerza constante, que es una misma respecto de cada punto, y que imaginamos que en el punto A tire en la direccion gA. Esto es causa de que la porcion infinitamente pequeña Bb siga en virtud de estas dos impulsos la direccion de la tangente BbM, que es la prolongacion del arco Bb. Pero si tiramos la vertical ebm infinitamente próxima á Bng, resultará el pequeño triángulo Bbe, rectángulo en e, semejante al triángulo BgM, rectángulo en g; y si suponemos que Bg represente la fuerza de la cadena BA en la direccion de la vertical, y gM la accion de la fuerza constante a, que suponemos en el vértice A, tendremos respecto de cada punto como B, esta proporcion $Mg : Bg :: Be : eb :: a : BA = u$. Fig.

Por consiguiente, si llamamos x cada abscisa tomada en el ege AD, ó en las paralelas Bg á dicho ege, é y cada ordenada BD; Be será dy, y eb será dx, y la proporcion antecedente se transformará en $dy : dx :: a : u$, y sacaremos $adx = udy$, ó $dy = \frac{adx}{u}$, que será la equacion de la curva catenaria BA ó CA.

593 Si en $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituimos en lugar de dy^2 su valor $\frac{aadx^2}{uu}$, sacado de la equacion de la curva, resultará $du = \sqrt{\left(\frac{uudx^2 + aadx^2}{uu}\right)} = \frac{dx}{u}\sqrt{(uu + aa)}$, y $du^2 = \frac{dx^2}{uu} \times (uu + aa)$, ó $uudu^2 = dx^2(uu + aa)$, y $udu = dx\sqrt{(uu + aa)}$, y $dx = \frac{udu}{\sqrt{(uu + aa)}}$; é integrando, $x = \sqrt{(uu + aa)}$, y $xx = uu + aa$, y $uu = xx - aa$, ó $u =$

$\sqrt{}$

Fig. $\sqrt{(xx - aa)}$. Esta última equacion está diciendo que un arco qualquiera u de la curva catenaria es (III. 202) igual á la ordenada de una hypérbola equilátera, cuyo semiege es a, y la abscisa x. Finalmente, si substituimos este valor de u en $dy = \frac{adx}{u}$, saldrá $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$, que será la equacion de la funicular ó catenaria que espresa la relacion entre la ordenada $y = S. dy = S. \frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ y la abscisa x.

594 Si en la equacion $x = \sqrt{(uu + aa)}$, ó $u = \sqrt{xx - aa}$, hacemos $u = 0$, saldrá $x = a$, de lo qual se infiere que la abscisa x no empieza en el vértice A donde está el origen de los arcos de la curva AB, y que no es solamente AD, sino que coge aun mas allá hasta el punto E donde se supone $AE = a$; luego $ED = x$, y $AD = x - a$.

595 Para construir esta curva, multiplicarémos la equacion $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ por a, saldrá $ady = \frac{aadx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Y como ady es el elemento de un rectángulo, y $\frac{aadx}{\sqrt{(xx - aa)}}$ es dupla de $\frac{aadx}{2\sqrt{(xx - aa)}}$ que es el elemento (III. 578) de un sector de una hypérbola equilátera, de cuyo primer ege la mitad es a; por consiguiente si sobre el primer ege $EAD = x$, y por el vértice A trazamos una hypérbola equilátera AF, cuyo centro esté en E, y la mitad del primer ege EA sea a, y tiramos la recta EF, resultará el sector hyperbólico $AEF = S. \frac{aadx}{2\sqrt{(xx - aa)}}$ (III. 578); y si tiramos Ef paralela á Ag, y construimos el rectángulo Af igual al duplo del sector hyperbólico AEF, que miramos como dado, el rectángulo Af será ay ó $S.ady = S. \frac{aadx}{\sqrt{(xx - aa)}}$.

Fi-

Finalmente, si prolongamos la ordenada FD de la hypér- Fig.
bola, y fg del rectángulo, su punto de concurso B será uno de los de la curva funicular.

Por el mismo camino se hallarán todos los demás, porque si concebimos el rectángulo Af dividido en un número infinito de elementos iguales, como $fgm'm$, y el sector hyperbólico AEF dividido en el mismo número de elementos ó sectores pequeños iguales, cada elemento del rectángulo será duplo de cada elemento correspondiente del sector, y $Be = dy$ de la curva BA, será $= fm = dy$ del elemento del rectángulo, y $eb = dx$ de la curva BA, será $= gf = dx$ que lleva la espresion del sector hyperbólico. Por consiguiente, en virtud de la construccion $ady = \frac{2aadx}{2\sqrt{(xx-aa)}}$, y $Be = dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, que es la equacion de la curva que se habia de construir.

596 Tambien se puede construír la catenaria por medio de la rectificacion de la parábola vulgar.

Ya que $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, con substituir en lugar de dy^2 su valor sacado de la equacion $dy = \frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ de la curva (593), inferiremos que $dy + du = \frac{adx+xdx}{\sqrt{(xx-aa)}} = dx\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$, despues de dividido el numerador y denominador por $\sqrt{x+a}$. Se ha de buscar una curva cuyas ordenadas x é y tengan un mismo orígen E que las coordenadas de la curva BA, y estén en unas mismas rectas; y llamando t cada uno de los arcos de la última curva desde su vértice, el elemento de su rectificacion será $dt = dx\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$. Para conseguirlo, haremos

Fig. $dt = dx\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, de donde sacaremos $\frac{xdx^2 + adx^2}{x-a} = dy^2 + dx^2$; restando dx^2 de cada miembro, resultará $\frac{xdx^2 + adx^2}{x-a} - dx^2 = \frac{2adx^2}{x-a} = dy^2$, $dy = dx\sqrt{\left(\frac{2a}{x-a}\right)}$, é integrando $y = 2\sqrt{(2a \times \overline{x-a})} = \sqrt{(8a \times \overline{x-a})}$, que es la equacion de una parábola vulgar, cuyas ordenadas son $x-a$, y tienen por lo mismo su origen en A, y su parámetro $= 8a$.

Por consiguiente, si sobre el ege AD trazamos la parábola AG, con un parámetro $= 8a$, y tomamos una recta igual á la tirantez que suponemos conocida de cada arco de dicha parábola, y aplicamos la espresada recta al punto correspondiente de la hypérbola equilátera AF, sobre la ordenada correspondiente al mismo punto; por egemplo, si tomamos la recta igual á AG, y la aplicamos al punto F correspondiente á G, sobre FD, el punto B donde rematare esta recta igual á AG, será uno de los puntos de la catenaria BA; del mismo modo se trazarán todos sus demás puntos.

Porque la longitud del arco $AG = S.dt = S.dx\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}$ $= S.\frac{xdx + adx}{\sqrt{(xx-aa)}} = S.\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}} + S.\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} = S.dy + S.du$; y si restamos $S.du = S.\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}} = \sqrt{xx-aa}$ (que es la integral de $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$) $= FD$, que es la ordenada de la hypérbola equilátera AF, quedará $S.dy = y = S.\frac{adx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, que es la equacion de la catenaria que nos propusimos construir.

Cues-

597 Cuestion IV. *Hallar la naturaleza de la curva* Fig. tautocrona, *esto es, de una curva que tiene la propiedad de que un cuerpo que baja á lo largo de ella, sea el que fuere el punto desde el qual empieza á bajar, llega siempre en un mismo tiempo al punto mas bajo de la curva.*

Por los términos en que viene propuesta la cuestion, 253. hemos de hallar la curva *BAC*, cuyo ege *AD* es vertical, de tal naturaleza, que el cuerpo *B* bajando desde cierto punto *B*, llegue á *A* en el mismo tiempo que si bajase desde otro punto qualquiera *C*; quiero decir, que si dos cuerpos empiezan á bajar á un tiempo, el uno desde *B* y el otro desde *C*, lleguen ambos á un tiempo al punto mas bajo *A*.

Pongamos, para escusar confusion, al otro lado del ege otra porcion *AB* de la curva. Dividamos *AC* en un número infinito de partes iguales *Ac*, *cd*, *de* &c. y la porcion *AB* en otras tantas *Ab*, *bl*, *lm* &c. La naturaleza de la curva ha de ser tal que su arco *Ci* sea andado en el mismo tiempo que *Bq*; *ib* en el mismo tiempo que *qp*; *bg* en el mismo tiempo que *po* &c. y así prosiguiendo; con esto toda la curva *CA* será andada en el mismo tiempo que *BA*. Todo esto supuesto, yá que los arcos *Ab*, *Ac* son andados en intervalos iguales de tiempo, será la velocidad en *b* á la velocidad en *c*, como *bA* á *cA*, como toda la *BA* á toda la *CA*; por consiguiente el quadrado de la velocidad en *b* es al quadrado de la velocidad en *c*, como el quadrado de *BA* al quadrado de *CA*. Pero el quadrado de la velocidad en *B* es al quadrado de la velocidad

en

Fig. en *C*, como la altura vertical *AE* á la altura vertical *AF*; luego el quadrado de *AB* es al quadrado de *AC*, como *AE* es á *AF*. Por consiguiente la cuestion de Dinámica queda reducida á una cuestion puramente geométrica, que se puede proponer en estos términos.

1254. *Hallar la curva* ABC *tal, que los quadrados de las porciones qualesquiera* AB, AC *sean proporcionales á las abscisas, esto es, tal que* $(AB)^2 : (AC)^2 :: AE : AF$, *y haya por consiguiente entre* $(AB)^2$ *y* AE *una razon constante que supondremos la de* a : 1.

Llamemos *AE*, x; *EB*, y; *AB*, u. Por la naturaleza de la curva será $a : 1 :: uu : x$; luego $uu = ax$, y $u = \sqrt{ax}$, y du ó $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$. Quadrando, saldrá $dx^2 + dy^2 = \frac{aadx}{4ax}$, ó $4xdx^2 + 4xdy^2 = adx^2$, y $4xdy^2 = adx^2 - 4xdx^2$, y sacando las raices, tendremos $dy\sqrt{4x} = dx\sqrt{(a - 4x)}$, y $dy = \frac{dx\sqrt{(a - 4x)}}{\sqrt{4x}} = \frac{dx(\frac{1}{4}a - x)}{\sqrt{x}}$ = (con multiplicar arriba y abajo por $\sqrt{\frac{1}{4}a - x)}$ $\frac{(\frac{1}{4}a - x)dx}{\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}} = \frac{(\frac{1}{8}a - x)dx}{\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}} + \frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}}$, y, sacando las integrales, $y = \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$ mas la integral de $\frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}}$. Pero la integral de esta última cantidad se

1255. saca con trazar el semicírculo *AGF* con el diámetro $AF = \frac{1}{4}a$, siendo $AE = x$, será el arco $AG = S.\left(\frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}}\right)$

Y

Y como $\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} = EG$, será EB ó $y = EG +$ Fig.
GA, ó $GA = GB$. Por consiguiente (III. 369) *la curva tautocrona es la Cycloide.*

598 Esto se puede tambien demostrar sin cálculo. Porque la porcion de cycloide AB es (III. 594) dupla de la cuerda AG, y por consiguiente las diferentes porciones de las cycloides son proporcionales á las cuerdas correspondientes del círculo generador. Luego los quadrados de AB son proporcionales á los quadrados de las AG. Y como estos quadrados son iguales (I. 523) al rectángulo del diámetro por la abscisa correspondiente AE, serán los quadrados de todas las AG como las abscisas AE; luego finalmente los quadrados de los diferentes arcos de la cycloide son como las abscisas correspondientes.

599 De aquí se puede sacar facilmente una demos- 256.
tracion syntética de la propiedad que tiene la cycloide de ser la curva Tautocrona. Supongamos que sea BAC la cycloide, y que dos cuerpos empiecen á bajar á un mismo tiempo, el uno desde B, y el otro desde C; hemos de probar que ambos llegarán á un mismo tiempo al punto A.

Divídanse los dos arcos de cycloide en un número muy crecido de partes, que sea el mismo respecto de cada arco, de modo que pq ocupe el mismo lugar en BA, que ib en CA. Sentado esto, $FA : EA :: (CA)^2 : (BA)^2 :: (ib)^2 : (pq)^2 :: (Ai)^2 : (Aq)^2 :: AR : AS$. Luego $FA : EA :: AR : AS$, ó $FA : AR :: EA : AS$, y (I. 189) FR ó Li: ES ó $Mq :: (ib)^2 : (qp)^2$. Pero $LI : Mq$ como el quadrado

Fig. de la velocidad en i es al quadrado de lá velocidad en q; luego $(ib)^2$ es á $(qp)^2$ como el quadrado de la velocidad en i es al quadrado de la velocidad en q; y por consiguiente ib es á qp; como la velocidad en i es á la velocidad en q; luego el arco ib es andado en el mismo tiempo que el arco qp. Lo que acabámos de probar respecto de estas dos porciones de la curva, queda probado respecto de los demás, y por consiguiente de los arcos enteros CA y CB, que tambien serán andados en un mismo tiempo.

De todo esto se deduce que si queremos que un pén-
1257. dulo haga sus oscilaciones en tiempos iguales, se han de construir dos cycloides iguales ABC, ADE, cuyos eges sean verticales, y atar en el punto A un hilo igual á la semicycloide, estando atado en el otro estremo del hilo el peso P, y sus oscilaciones serán isocronas.

Porque la linea PQR que trazará el peso á medida que el hilo se desprendiere de la cycloide ABC ó ADE, será por lo dicho (III.447) la evoluta de estas cycloides, cuya evoluta es tambien (III.462) una cycloide, y por consiguiente será andada en tiempos iguales.

1258. 600 *Es muy facil de trazar la cycloide vulgar.* Para manifestarlo, supondremos que sea AB el ege de la cycloide, AMB el círculo generador; divídase la semicircunferencia AMB en un número de partes iguales el mayor que se pudiere, y desde los puntos de division tírense rectas indefinitas perpendiculares á AB. Si á cada una de estas rectas se la dán tantas de dichas partes quantas coge el nú-

número que espresa la distancia, á que cada una de dichas perpendiculares está del punto *A*, el estremo de cada perpendicular será uno de los puntos de la cycloide. Por egemplo, á la linea *MN* que sale de la séptima division, se la han de dar siete de las partes iguales en que está dividida la semicircunferencia *AMB*. Fig.

601 Cuestion V. *Dados en un plano vertical dos puntos* A *y* B, *hallar la naturaleza de la curva, que trazará un cuerpo pesado para ir desde* A *á* B *en el tiempo mas corto. Esta curva se llama la* Brachystocrona, *ó la curva de la caida mas veloz.*

Imaginemos que *AMB* es la curva de que se trata; esto es, la que trazará un cuerpo pesado para ir en el tiempo mas breve desde el punto dado *A*, al punto dado *B*. Si tomamos en esta curva dos puntos infinitamente próximos *M* y *m'*, es preciso que el arco *Mm'* sea andado en menos tiempo que otro arco qualquiera que pasáre por los dos mismos puntos *M* y *m'*, pues podemos suponer que *M* y *m'* sean los dos puntos dados. Tomaremos un punto *N* que esté infinitamente mas próximo á *Mm'* que *M* á *m'*, é imaginarémos las dos rectas *MN* y *Nm'*; yá que el tiempo de la caida por *Mmm'* ha de ser un *mínimo*, será preciso que la diferencia entre el tiempo por *Mmm'*, y el tiempo por *MNm'* que es la diferencial del tiempo quando se pasa del un arco al otro, sea cero. 259.

Tiremos por los puntos *M*, *N*, *m'* las orizontales *Mp*, *mp*, *m'p'*; é imaginemos la vertical *AC*. Llamemos *AP*, *x*;

 PM,

Fig. *PM*, *y*; *AM*, *s*. Y supongamos $Mm = mm'$; esto es ds constante. Tendremos $mr = dx$; $rM = dy$; $mr' = dx + ddx$; $r'm' = dy + ddy$. Sea u la velocidad del cuerpo quando anda *Mm*; u será tambien la velocidad (210) con que anda *MN*; y $u + du$ será la velocidad con la qual andará mm' y Nm'. Luego el tiempo por *Mm*, será $\frac{ds}{u}$, y el tiempo por mm' será $\frac{ds}{u+du}$.

Desde los puntos *M* y m' como centros, y con los radios *MN*, mm' trazaremos los arcos *Nn*, *mt*. De la comparacion de los triángulos *Nmn*, *Nmt* con los triángulos *Mmr*, $mm'r'$, sacaremos $nm = Nm \times \frac{dy}{ds}$, y $Nt = Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}$. Luego $MN = ds - Nm \times \frac{dy}{ds}$, y $Nm' = ds + Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}$. Luego el tiempo por *NM* será $\frac{ds - Nm \times \frac{dy}{ds}}{u}$,

y el tiempo por Nm' será $\frac{ds + Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}}{u+du}$. Tendremos, pues, $\frac{ds - Nm \times \frac{dy}{ds}}{u} + \frac{ds + Nm \times \frac{dy+ddy}{ds}}{u+du} - \frac{ds}{u} - \frac{ds}{u+du} = 0$, cuya equacion se reduce á $\frac{Nm}{ds}\left(\frac{dy+ddy}{u+du} - \frac{dy}{u}\right) = 0$, ó $d\left(\frac{dy}{u}\right) = 0$; luego integrando $\frac{dy}{u} = \frac{ds}{C}$, ó $Cdy = uds$. Pero ya que la velocidad u es la misma (248) que el mobil hubiera adquirido cayendo de la altura *AP*, tendremos $uu = 2px$; luego $Cdy = ds\sqrt{(2px)}$, y $C^2dy^2 = 2pxds^2 = 2px(dx^2 + dy^2)$, de donde sacaremos $dy = \frac{dx\sqrt{(2px)}}{\sqrt{(C^2 - 2px)}}$.

Para determinar la constante *C*, repararémos que quando

do $\sqrt{2px} = C$, es $dy = ds$; luego si llamamos V la velocidad que tendrá el cuerpo en el punto donde $\sqrt{2px} = C$, la equacion $Cdy = uds$, será entonces $Cds = Vds$, que dá $C = V$. Y si llamamos b la altura correspondiente AC, resultará $VV = 2pb$, luego $CC = 2pb$. Luego $dy = \frac{dx\sqrt{2px}}{\sqrt{(2pb - 2px)}}$, ó $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b-x)}}$, que és la equacion de la curva; pero para conocerla mejor, demos otra forma á la equacion. Fig.

Imaginemos por el punto R donde $dy = ds$, la vertical RD; y despues de prolongada PM en O, llamemos AD, a; OR, x'; OM, y'. Tendremos $x = b - x'$, $y = a - y'$; $dx = -dx'$; $dy = -dy'$; substituyendo estos valores, saldrá $dy' = \frac{dx'\sqrt{(b-x')}}{\sqrt{x'}} = \frac{bdx' - x'dx'}{\sqrt{(bx' - x'x')}} = \frac{\frac{1}{2}bdx' - x'dx'}{\sqrt{(bx' - x'x')}} + \frac{\frac{1}{2}bdx'}{\sqrt{(bx' - x'x')}}$. Luego $y' = C' + \sqrt{(bx' - x'x')} + S. \frac{\frac{1}{2}bdx'}{\sqrt{(bx' - x'x')}}$.

Concibamos que sobre DR, ó b, como diámetro, se haya trazado el semicírculo DER. Será $OE = \sqrt{(bx' - x'x')}$, y el arco $RE = S. \frac{\frac{1}{2}bdx'}{\sqrt{(bx' - x'x')}}$; luego tenemos en general $OM = C' + OE + RE$.

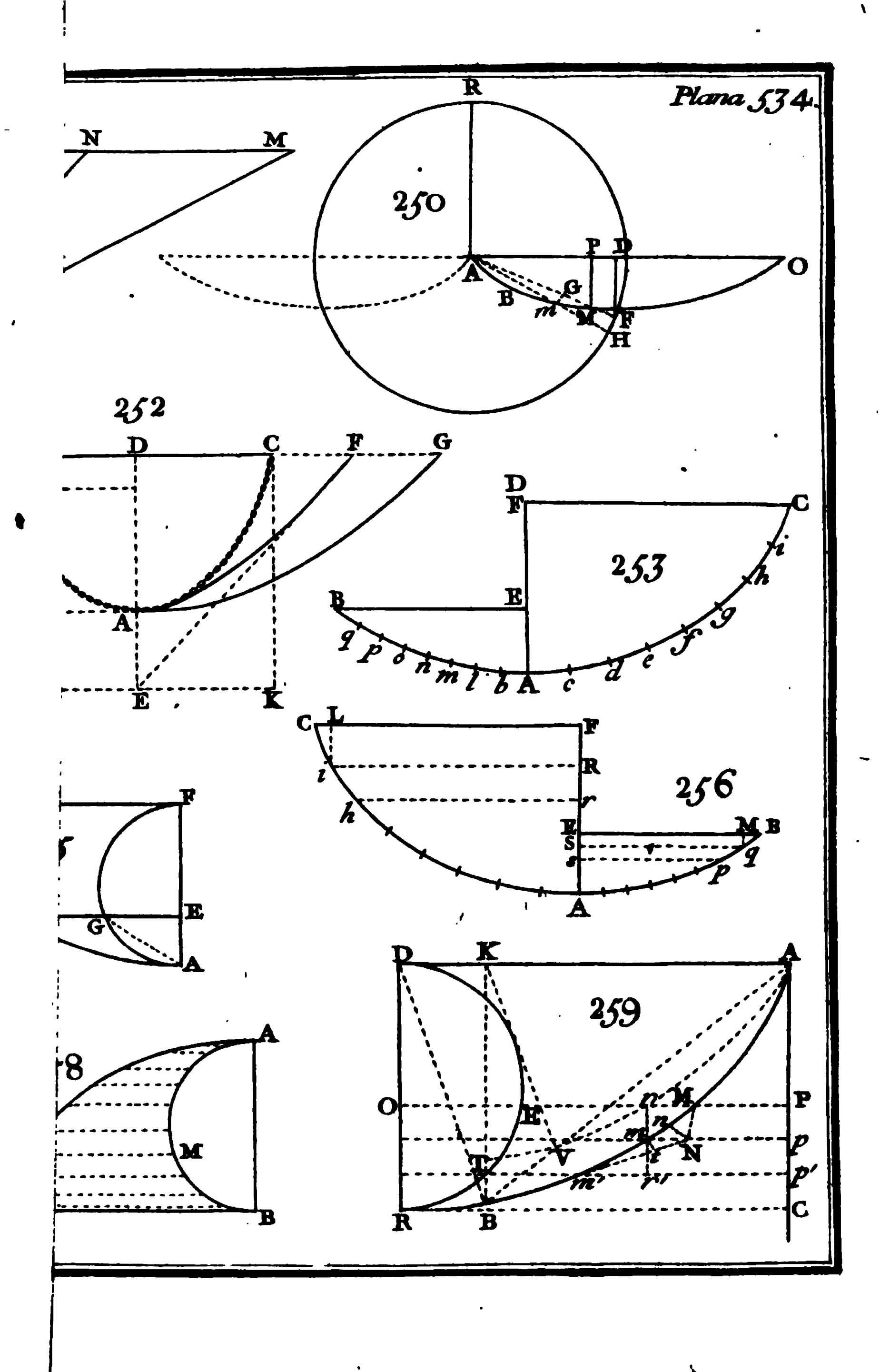
Para determinar la constante C', conviene considerar que quando $x' = 0$, ha de ser $y' = 0$. Luego yá que entonces OE y RE llegan á ser cero, será $C' = 0$. Luego OM

=

Fig. $=OE+RE$; luego la curva brachytocrona es (III. 369) una semicycloide vulgar cuyo círculo generador es *DER*, y cuya semibase es *AD*. Solo nos falta determinar *b*; porque no hay mas datos que los puntos *A* y *B* por donde el cuerpo debe pasar. Determinaremos *b* por este camino.

Tirarémos la vertical *BK* que encuentre en *K* la orizontal *AK* tirada por el punto *A*; sobre *AK*, como semibase, se trazará la semicycloide *AVT*; esto es, una semicycloide cuyo círculo generador tenga su semicircunferencia $=AK$. Y despues de tirada *AB* que corte esta cycloide en *V*, tiraremos la *VK*, tirandola á esta por el punto *B* la paralela *BD* que determinará la semibase *AD* de la cycloide que se busca; esto es, la semicircunferencia de su círculo generador. Fúndase esta construccion en que las cycloides *AVT*, *ABR*, cuyas bases están sobre *AD*, y que tienen comun el punto *A*, son semejantes, como es facil de probar.

FIN
DEL TOMO QUARTO.


Plana 534.
250
252
253
256
259
8

